PROBLEMA 1

Determinare il punto simmetrico di P(–5;13) rispetto alla retta 2*x*–3*y*–3=0

Soluzione

Il simmetrico di P rispetto ad una retta r è il punto P’ che appartiene alla retta passante per P, perpendicolare ad r tale che il punto medio del segmento PP’ sia sulla retta *r*.

- determinare la retta *s* passante per P e perpendicolare ad *r*.

$m_r = \frac{2}{3}$ quindi $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{3}{2}$

sfruttando l’equazione del fascio proprio ($y = y_0 + m(x - x_0)$)si ha s: $y = 13 - \frac{3}{2}(x+5)$ cioè $3x + 2y - 11 = 0$

- determinare l’intersezione tra r ed s per trovare il punto medio M del segmento PP’

$\begin{cases} 2x - 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$ risolvendo il sistema si ottiene $M(3;1)$

- determinare le coordinate di P’

ricordando la relazione che permette di calcolare le coordinate del punto medio di un segmento si ha: $\begin{cases} \frac{x_P + x_{P'}}{2} = x_M \\ \frac{y_P + y_{P'}}{2} = y_M \end{cases}$ da qui $\begin{cases} x_{P'} = 11 \\ y_{P'} = -11 \end{cases}$

Suggerimenti per altre possibili soluzioni 

⇒ Il punto P’ può essere visto anche come il punto sulla retta s che ha da r la stessa distanza di P.
⇒ Il punto P’ può essere visto anche come il punto sulla retta s che ha da M la stessa distanza di P.

PROBLEMA 2

Scrivere l’equazione della circonferenza che passa per A(-6;0) e B(0;0) e ha il centro sulla retta 2*y*=*x*+11. Scrivere poi le equazioni delle rette tangenti in tali punti e, detto D il punto di intersezione di tali tangenti, determinare l’area del triangolo ABD.

Soluzione

Il centro della circonferenza appartiene all’asse del segmento AB e alla retta *r* indicata nel testo, è quindi possibile determinarlo come punto di intersezione tra le due rette. Trovato il centro C si può trovare il raggio come lunghezza di $\overline{BC}$ e quindi si trova l’equazione della circonferenza

- Determinare l’asse *s* del segmento AB

Dal disegno si osserva facilmente che è *x*=-3.

- Determinare le coordinate del centro come intersezione tra *r* e *s*.

$\begin{cases} 2y = x + 11 \\ x = -3 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} y = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

- Determinare il raggio della circonferenza come distanza tra B e C

$R = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = 5$

- Scrivere l’equazione della circonferenza

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2$ cioè $x^2+y^2+6x-8y=0$

Per determinare l'equazione delle ratta tangente alla circonferenza in un suo punto si può ricordare che la tangente è la retta passante per il punto, perpendicolare al corrispondente raggio.

- Determinare il coefficiente angolare della retta CA e della retta CB

$m_{CA}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $m_{CB}=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=-\dfrac{4}{3}$

Determinare il coefficiente angolare delle corrispondenti tangenti

$m_{\tan A}=-\dfrac{1}{m_{CA}}=-\dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $m_{\tan B}=-\dfrac{1}{m_{CB}}=\dfrac{3}{4}$

- Determinare l'equazione delle tangenti sfruttando l'equazione del fascio proprio ($y=y_0+m(x-x_0)$)

Tangente in A: $y=0-\dfrac{3}{4}(x+6)$ $\quad$ $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2}$

Tangente in B: $y=0+\dfrac{3}{4}(x-0)$ $\quad$ $y=\dfrac{3}{4}x$

Per calcolare l'area del triangolo ABD è sufficiente calcolare base e altezza, scelta come base AB l'altezza sarà il modulo dell'ordinata del punto D.

- Determinare il punto D

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ x=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\dfrac{9}{4} \\ x=-3 \end{cases}$$

- Determinare l'area del triangolo

$$Area=\frac{6\cdot\frac{9}{4}}{2}=\frac{27}{4}$$

Suggerimenti per altre possibili soluzioni

⇒ L'equazione della circonferenza può essere determinata a partire dall'equazione della forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$ utilizzando come condizioni il passaggio per A, per B e l'appartenenza del centro (che ha coordinate $(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$) alla retta *r*.

⇒ Le equazioni delle tangenti si possono determinare anche intersecando il fascio proprio passante per A (o per B), con l'equazione della circonferenza e ponendo uguale a 0 il discriminante dell'equazione di secondo grado che si ottiene risolvendo il sistema.

PROBLEMA 3

Scrivere l'equazione della circonferenza che è tangente nel punto A(0;2) alla retta *r*: $3x+8=4y$ e ha il centro sulla retta *s* di equazione $y+2x=3$. Tra le rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante trovare quelle che, intersecando la circonferenza, determinano una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Soluzione

Il centro della circonferenza appartiene alla retta *s*, ma anche alla retta passante per A perpendicolare ad *r*. Trovato il centro C, si può calcolare il raggio come distanza $\overline{AC}$

- determinare la retta *t* passante per A e perpendicolare ad *r*.

$m_r = \frac{3}{4}$ quindi $m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{4}{3}$

sfruttando l'equazione del fascio proprio ($y = y_0 + m(x - x_0)$)si ha t: $y = 2 - \frac{4}{3}(x - 0)$ cioè $4x + 3y - 6 = 0$

- determinare le coordinate del centro come intersezione tra *s* e *t*.

$\begin{cases} y + 2x = 3 \\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$ risolvendo il sistema si ottiene $C(\frac{3}{2}; 0)$

- Determinare il raggio della circonferenza $\overline{AC}$

$R = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \frac{5}{2}$

- Scrivere l'equazione della circonferenza

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ cioè $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$

Le rette parallele alla bisettrice del 2°-4° quadrante sono quelle del fascio improprio, ponendole a sistema con la circonferenza si trovano i punti di intersezione (in funzione di un parametro); imponendo che la distanza tra i due punti di intersezione sia $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ come richiesto, si trova il valore del parametro.

- Scrivere le rette parallele alla bisettrice del 2°-4° quadrante

$y = -x + k$

- Trovare i punti di intersezione tra il fascio e la circonferenza e la distanza tra questi due punti

$\begin{cases} y = -x + k \\ x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$ risolvendo si ottiene: $\begin{cases} x_{1,2} = \frac{2k + 3 \pm \sqrt{41 + 12k - 4k^2}}{4} \\ y_{1,2} = \frac{2k - 3 \mp \sqrt{41 + 12k - 4k^2}}{4} \end{cases}$; la distanza tra i punti P_1 e P_2 è quindi: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_{P1} - x_{P2})^2 + (y_{P1} - y_{P2})^2} = \frac{\sqrt{41 + 12k - 4k^2}}{2}\sqrt{2}$

- Determinare il valore di k imponendo che $\overline{P_1P_2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{41 + 12k - 4k^2}}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ risolvendo si trova: $k = -1 \quad \vee \quad k = 4$

Suggerimenti per altre possibili soluzioni

$\Rightarrow$ L'equazione della circonferenza può essere determinata a partire dall'equazione della forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ utilizzando come condizioni il passaggio per A, l'appartenenza del centro (che ha coordinate $(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$) alla retta *s* e la tangenza alla retta *r*. L'ultima condizione si imposta mettendo a sistema l'equazione generale della circonferenza con la retta r e ponendo uguale a 0 il discriminante dell'equazione di secondo grado che si ottiene risolvendo il sistema.

⇒ Per determinare l'equazione della retta parallela alla bisettrice del 2°-4° quadrante che intercetta la corda di lunghezza $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, si può anche procedere per via geometrica, guardando il disegno e ricordando che il raggio della circonferenza è $\frac{5}{2}$.

PROBLEMA 4

In un piano cartesiano ortogonale determinare:

a) l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*, passante per A(−4;0) e avente vertice V(−2;2)
b) l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto di ascissa 1
c) l'equazione della retta parallela all'asse *x* sulla quale la parabola stacca una corda di lunghezza 2

Soluzione

La parabola da determinare è la parabola del fascio di parabole con asse verticale e vertice V, passante per A.

➢ Determinare l'equazione delle parabole con asse verticale e vertice V

Dalla relazione $y = y_V + a(x - x_V)^2$ si ha: $y = 2 + a(x+2)^2$

➢ Determinare la parabola passante per A, imponendo la condizione di passaggio:

$0 = 2 + a(-4+2)^2$ quindi $a = -\frac{1}{2}$.

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Per determinare l'equazione della retta tangente si procede mettendo a sistema il fascio passante per il punto B della parabola di ascissa 1 con l'equazione della parabola stessa e ponendo uguale a 0 il delta dell'equazione di secondo grado che si ottiene risolvendo il sistema.

➢ Determinare il fascio di rette per B

$y_B = -\frac{1}{2}(1)^2 - 2\cdot(1) = -\frac{5}{2}$ quindi $y = -\frac{5}{2} + m(x-1)$

➢ Determinare il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in B

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2} + mx - m \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x \end{cases}$$

sostituendo si ottiene l'equazione di secondo grado in *x* con parametro *m* $x^2 + x(4+2m) - 5 - 2m = 0$;

imponendo $\Delta = 0$ si trova $m = -3$

L'equazione della retta tangente è quindi: $y = -\frac{5}{2} - 3(x-1)$ $y = -3x + \frac{1}{2}$

Per determinare la corda parallela all'asse x di lunghezza 2 basta mettere a sistema la generica retta orizzontale con la parabola, trovare le coordinate dei punti di intersezione P_1 e P_2 e quindi imporre che $\overline{P_1P_2} = 2$

- Scrivere le rette orizzontali

$y = k$

- Trovare i punti di intersezione tra il fascio di rette e la parabola e la distanza tra questi due punti

$\begin{cases} y = k \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x \end{cases}$ risolvendo si ottiene: $\begin{cases} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2k} \\ y_{1,2} = k \end{cases}$; la distanza tra i punti P_1 e P_2 è quindi: $\overline{P_1P_2} = |x_1 - x_2| = 2\sqrt{4-2k}$

- Determinare il valore di k imponendo che $\overline{P_1P_2} = 2$

$2\sqrt{4-2k} = 2$ risolvendo si trova: $k = \frac{3}{2}$.

Suggerimenti per altre possibili soluzioni 

$\Rightarrow$ L'equazione della parabola può essere determinata a partire dall'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$, imponendo il passaggio per il vertice V, per il punto A e imponendo che l'ascissa del vertice sia -2.

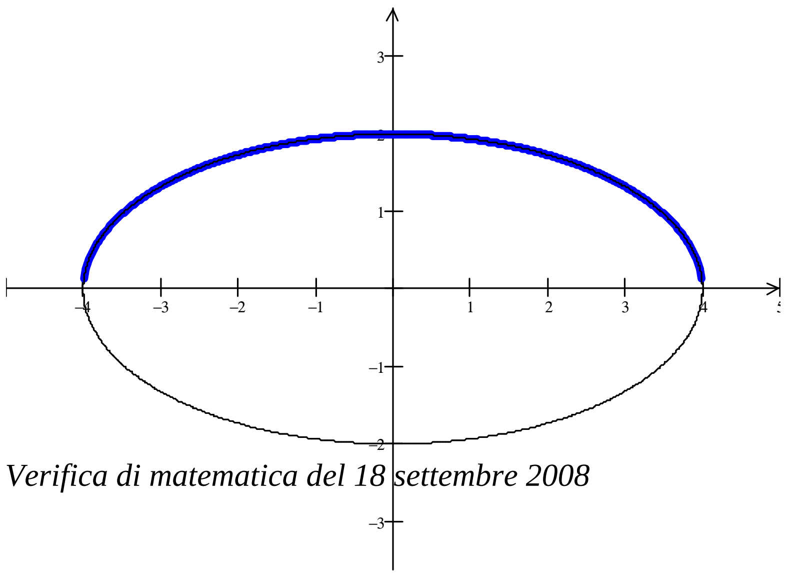
FUNZIONE 1 $y = \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2}$

Elimino la radice mettendo le condizioni di esistenza, quelle di concordanza ed elevando al quadrato

$$\begin{cases} 4 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \ -4 \leq x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ y^2 = 4 - \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

N.B. mi ricordo alla fine di considerare solo la parte sopra l'asse delle ascisse

l'equazione di secondo grado ottenuta è quella di un'ellisse riferita agli assi: $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 4$; va riportata alla forma canonica dividendo tutto per 4, si ottiene: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (a = 4 \quad b = 2)$.



$f : [-4;\ 4] \to [0;2]$
non è iniettiva, ma è suriettiva

FUNZIONE 2 $y = -\sqrt{|x|+1}$

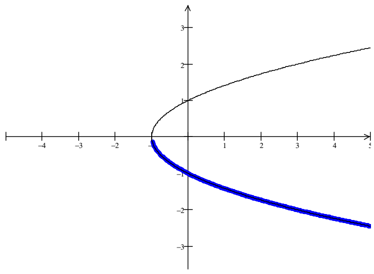
Poiché la funzione ha il modulo su tutte le *x* presenti posso dedurne il grafico tracciando quello ditracciare il grafico di $y = -\sqrt{x+1}$,

Elimino la radice mettendo le condizioni di esistenza, quelle di concordanza ed elevando al quadrato

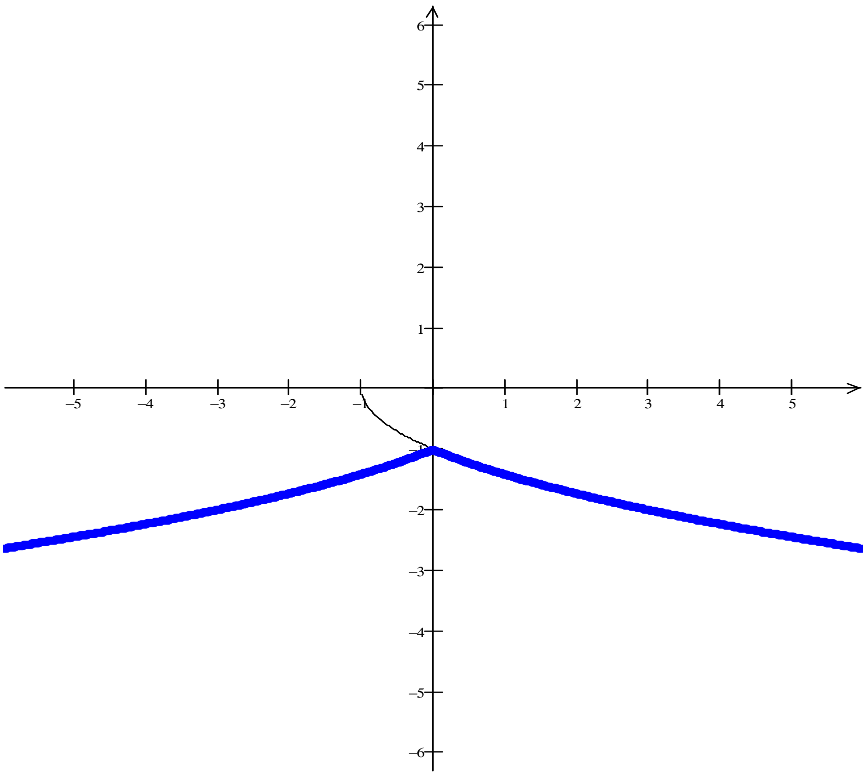
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1 \\ y \leq 0 \\ y^2 = x+1 \end{cases}$$

N.B. mi ricordo alla fine di considerare solo la parte sotto l'asse delle ascisse

l'equazione di secondo grado ottenuta rappresenta una parabola con asse orizzontale $x = y^2 - 1$ V(-1; 0)



Poiché il grafico della funzione di partenza aveva il modulo sulle x, devo considerare la parte a destra dell'asse verticale più la sua simmetrica.



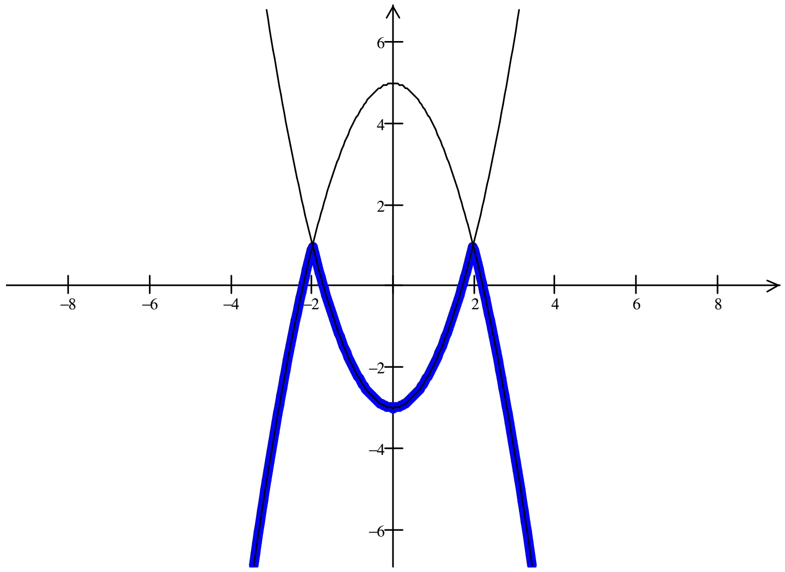
$f : R \rightarrow (-\infty; -1]$

non è iniettiva, ma è suriettiva

FUNZIONE 3 $y = 1 - \left|x^2 - 4\right|$

Poiché il modulo non è presente né su tutte le *x*, né sull'intera espressione, devo studiarlo e distinguere i due casi:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 & \Rightarrow\ x \leq -2\ \vee\ x \geq 2 \\ y = -x^2 + 5 & parabola\ \ con\ \ V(0;\ 5) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 & \Rightarrow\ -2 < x < 2 \\ y = x^2 - 3 & parabola\ \ con\ \ V(0;\ -3) \end{cases}$$



$f: R \to (-\infty; 1]$
non è iniettiva, ma è suriettiva

FUNZIONE 4 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

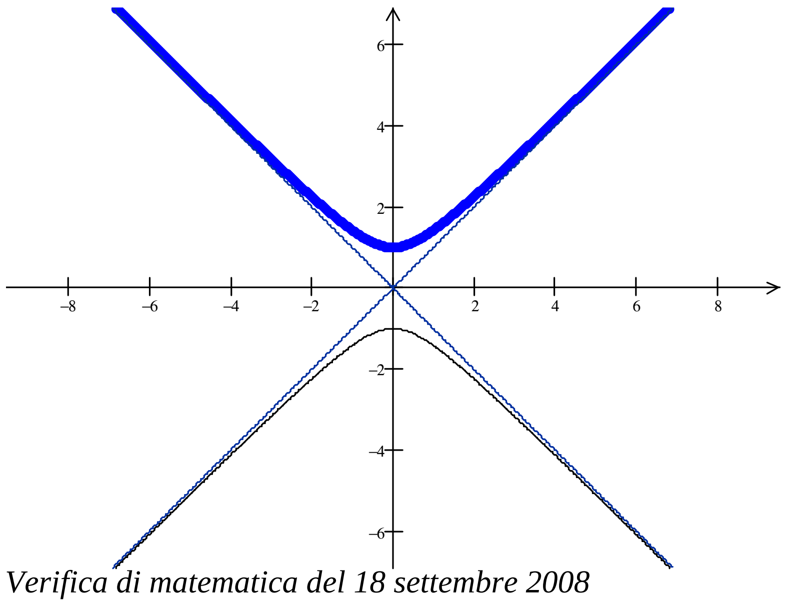
Elimino la radice mettendo le condizioni di esistenza, quelle di concordanza ed elevando al quadrato

$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 & \Rightarrow \forall\, x \\ y \geq 0 \\ y^2 = x^2 + 1 \end{cases}$$

N.B. mi ricordo alla fine di considerare solo la parte sopra l'asse delle ascisse

l'equazione di secondo grado ottenuta rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse y:

$$x^2 - y^2 = -1 \qquad (a = 1;\quad b = 1)$$



$f: R \to [1;\ +\infty)$
non è iniettiva, ma è suriettiva

DISEQUAZIONE 1 $\sqrt{1-x^2} > 1-|x|$

Per risolvere graficamente devo tracciare, sullo stesso riferimento i grafici delle funzioni: $y=\sqrt{1-x^2}$ e $y=1-|x|$.

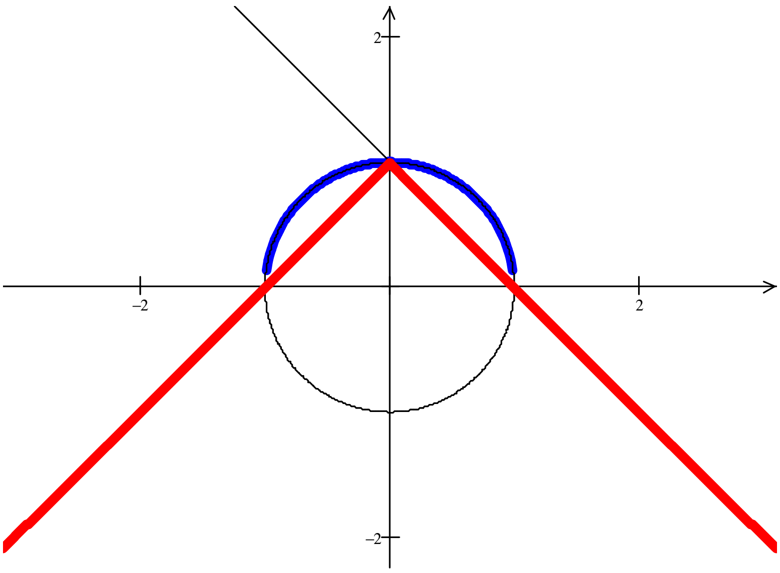
Per tracciare il primo metto le condizioni di esistenza, di concordanza ed elevo alla seconda:

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y^2 = 1-x^2 \end{cases}$$

N.B. mi ricordo alla fine di considerare solo la parte sopra l'asse delle ascisse

L'equazione di secondo grado ottenuta è quella di una circonferenza $x^2+y^2=1$ con centro C(0;0) e raggio R=1.

Il grafico della seconda funzione lo deduco da quello di $y=1-x$.

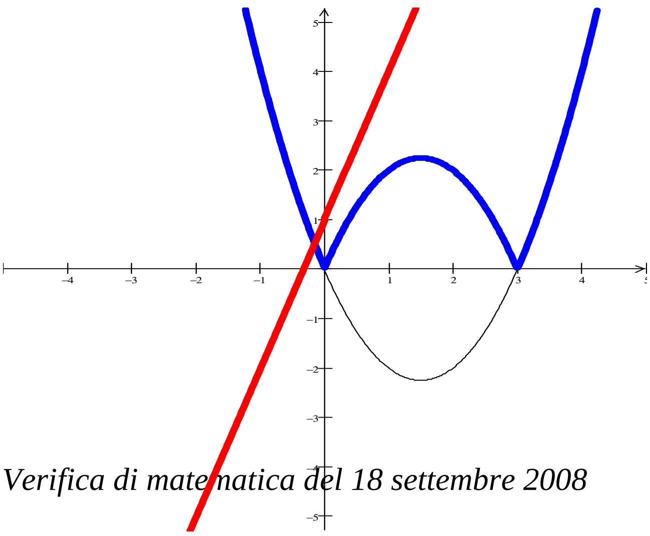


Dal grafico si deduce che la semicirconferenza si trova sopra la spezzata per $-1<x<0 \vee \ 0<x<1$

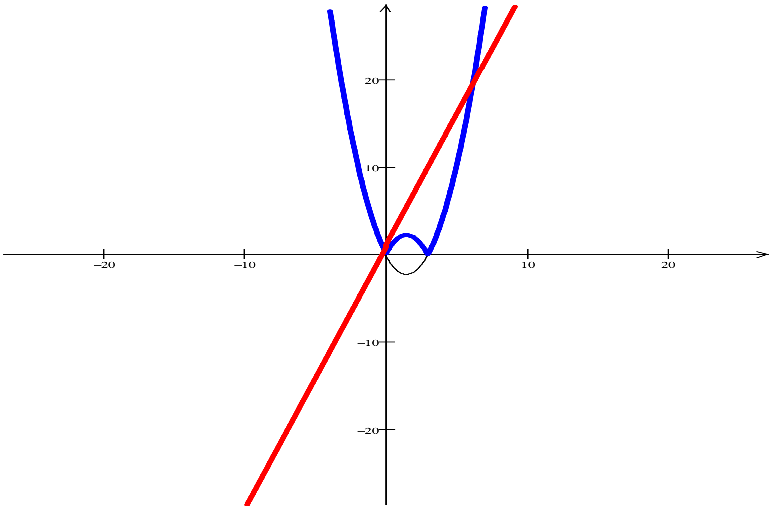
DISEQUAZIONE 2 $|x^2-3x| < 3x+1$

Per risolvere graficamente devo tracciare, sullo stesso riferimento i grafici delle funzioni: $y=|x^2-3x|$ e $y=3x+1$.

Il grafico della prima funzione si può dedurre da quello di $y=x^2-3x$, ribaltandone le parti negative (poiché c'è il modulo su tutta l'espressione). La seconda equazione rappresenta una retta.



Da questo grafico sembrerebbe che curva e retta si incontrino solo in un punto di ascissa negativa (α), in realtà provando a riportare qualche punto con ascisse più grandi si osserva che c'è un'ulteriore intersezione con ascissa positiva (β).



Da questo grafico si deduce che la retta si trova al di sopra della curva