Nome……………………….Cognome…………..   classe 5D   16 Dicembre 2008

VERIFICA di MATEMATICA

PROBLEMA

Considera la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-1}$, studiane l'andamento e tracciane il grafico probabile. (punti: 1.5)

a) Dai la definizione di funzione iniettiva. Sulla base del grafico probabile che hai tracciato, la funzione *f(x)* è iniettiva ? (punti. 0.5)

b) Dette *r* ed *s* le rette tangenti al grafico della funzione rispettivamente nei punti A(0;-2) e B(2;0) e detto *P* il loro punto di intersezione, determina l'area del triangolo *APB*. (punti: 1)

c) dal grafico della funzione *f(x)* deduci, senza farne lo studio, quello di $g(x)=\dfrac{x^2-3|x|+2}{x^2-|x|-1}$ (punti: 0.5)

QUESITI

Scegli e risolvi **5 tra i seguenti quesiti** (ciascuno punti: 1)

1) Determina i valori dei parametri *a* e *b* affinché risulti : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-ax+b\right)=0$

2) Determina i valori dei parametri *a* e *b* affinché la funzione $f_{a,b}(x)=\begin{cases} a+\sin x & se\ \ x<0 \\ 3b-1 & se\ \ x=0 \\ 2\ln(x+2) & se\ \ x>0 \end{cases}$ sia continua in *R*. Per i valori trovati, traccia il grafico della funzione

3) Dai la definizione di derivata di una funzione e specificane il significato geometrico. Data la funzione $y=x\ln x-2x+1$ determina i punti in cui la retta ad essa tangente forma un angolo di $\dfrac{\pi}{3}$ con il semiasse positivo delle *x*.

4) Dai la definizione di funzione continua in un punto x_o, quindi considera la funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x^3)}{1-x} & se\ \ x>1 \\ 3 & se\ \ x=1 \\ \dfrac{\sin(2\pi x)}{e^x-e} & se\ \ x<1 \end{cases}$ ed indica se è continua in x_o=1; in caso contrario specifica il tipo di discontinuità.

5) Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$ e centro O, considera sulla retta ad essa tangente in A, un punto C e sia D l'intersezione di OC con la semicirconferenza stessa. Posto $x=D\hat{A}O$ trova l'espressione del rapporto fra le aree dei triangoli OAC e ADC. Calcola il limite di tale espressione per $x\to 0$ (che corrisponde geometricamente a $D\to A$)

6) Per ciascuna delle seguenti richieste scrivi una funzione che la soddisfi:

a) funzione con asintoto obliquo con coefficiente angolare *m*=2 e asintoto verticale di equazione *x*=2

b) funzione con discontinuità di 2° specie in $x=\pi+2k\pi,\quad k\in Z$

c) funzione che sia un infinito del primo ordine per $x\to\infty$, ma che non ammetta asintoto obliquo.

Soluzioni verifica dicembre

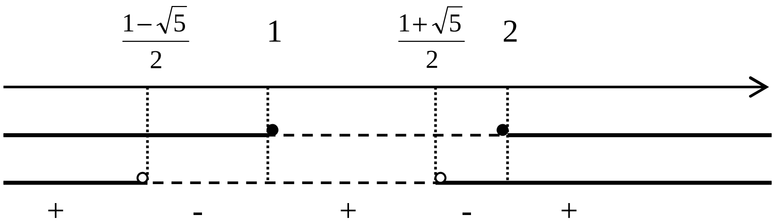
Problema: *Considera la funzione* $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-1}$ *, studiane l'andamento e tracciane il grafico probabile.*

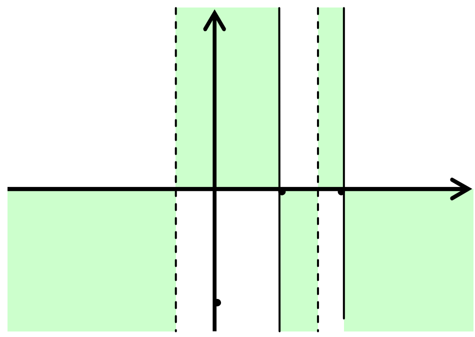
- Dominio

la condizione di esistenza è che il denominatore sia diverso da 0 $x^2-x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (-0,6 e 1,6), il dominio è dunque l'insieme: $D=\left(-\infty\ ;\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;+\infty\right)$

- Studio del segno e intersezioni con gli assi:

$$f(x)\geq 0 \quad\Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-1}\geq 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-x-1>0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x\leq 1 \vee x\geq 2 \\ x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$



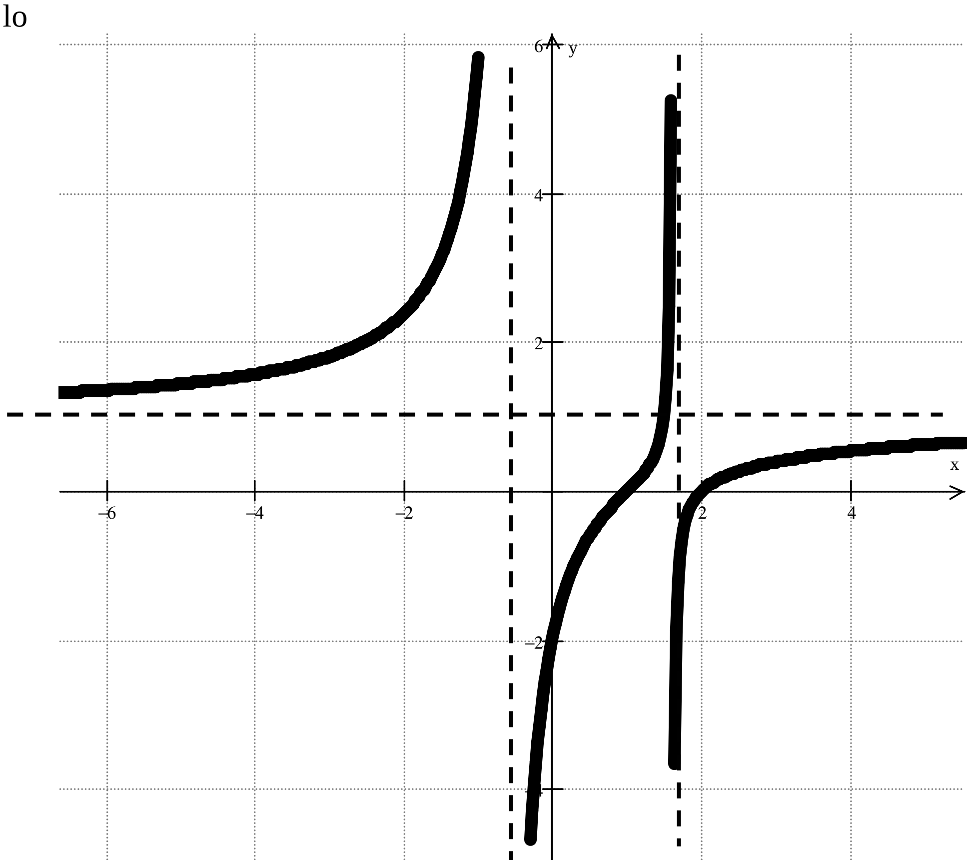


Intersezione con l'asse delle ordinate: $f(0)=\dfrac{0^2-3\cdot 0+2}{0^2-0-1}=-2$

- Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-1}=1$ perché $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ quindi $y=1$ è un asintoto orizzontale

$\lim\limits_{x\to\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-1}=\infty$ perché sono i valori che annullano il denominatore, ma non il numeratore. Per stabilire il segno dell'infinito si sfrutta lo studio del segno già fatto. Quindi $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ sono due asintoti verticali.

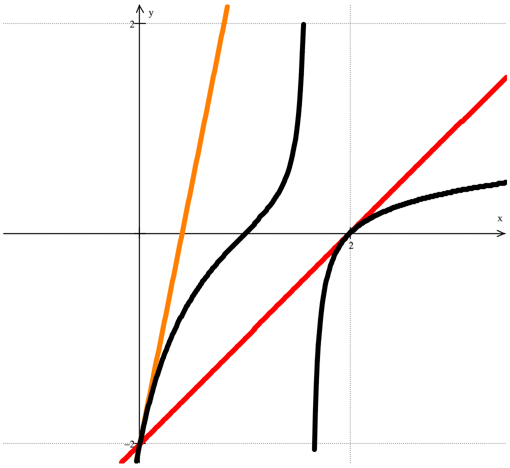


a) *Dai la definizione di funzione iniettiva. Sulla base del grafico probabile che hai tracciato, la funzione f(x) è iniettiva ?*

Una funzione si dice iniettiva se ogni valore di $y \in Codominio$ ammette al massimo una controimmagine, cioè a valori distinti di *x* corrispondono valori distinti di *y*. La funzione tracciata non è iniettiva.

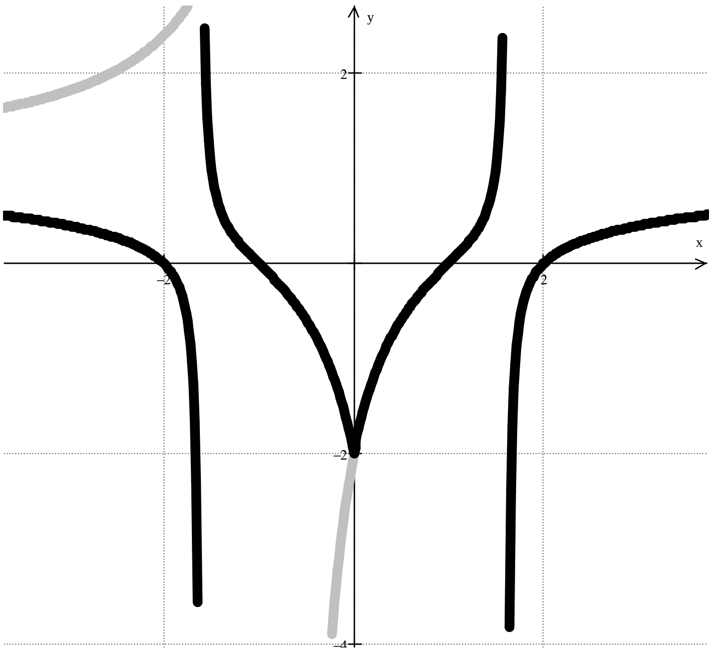
b) Dette *r* ed *s* le rette tangenti al grafico della funzione rispettivamente nei punti A(0;-2) e B(2;0) e detto *P* il loro punto di intersezione, determina l'area del triangolo *APB.*

Per determinare l'equazione della retta tangente ad una funzione in un suo punto si sfrutta la derivata prima che rappresenta il coefficiente angolare di tale retta. La funzione è fratta e quindi si utilizza la regola di derivazione di un quoziente: $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x^2-x-1)-(x^2-3x+2)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} = \dfrac{2x^2-6x+5}{(x^2-x-1)^2}$



Si ha quindi che *r* è la retta passante per A(0;-2) con coefficiente angolare *m*=*f'*(0)=5, quindi *y*=5*x*-2 mentre *s* è la retta passante per B(2;0) con coefficiente angolare *m*=*f'*(2)=1, quindi *y*=*x*-2.
Il loro punto di intersezione è P(0,-2), quindi il triangolo sarà degenere e dunque di area nulla.

c) *dal grafico della funzione f(x) deduci, senza farne lo studio, quello di* $g(x) = \dfrac{x^2-3|x|+2}{x^2-|x|-1}$



Il grafico richiesto è quello di $g(x) = f(|x|)$, quindi si ottiene prendendo tutti i punti del grafico di *f*(*x*) con ascissa positiva più i corrispondenti simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Quesito 1: determina i valori dei parametri *a* e *b* affinché risulti : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-ax+b\right)=0$

Osserviamo che se $a \neq 1$ si può scrivere $\left(\sqrt{x^2-2x+4}-ax+b\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} (x-ax) \to \infty$, affinché il limite venga 0 è quindi necessario che a=1. Con a=1, non si può più usare l'asintotico per il calcolo dle limite, perché si scriverebbe asintotico a 0, occorre quindi razionalizzare:

$$\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x+b\right)=\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x+b\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x-b\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x-b\right)}=\frac{x^2-2x+4-(x^2-2bx+b^2)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x+b\right)}=$$

$$=\frac{-2x+2bx-b^2+4}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x-b\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2x+2bx-b^2+4}{2x}$$

Affinché l'ultima espressione tenda a 0 quando $x \to +\infty$ è necessario che il coefficiente della x a numeratore sia nullo, cioè b=2.

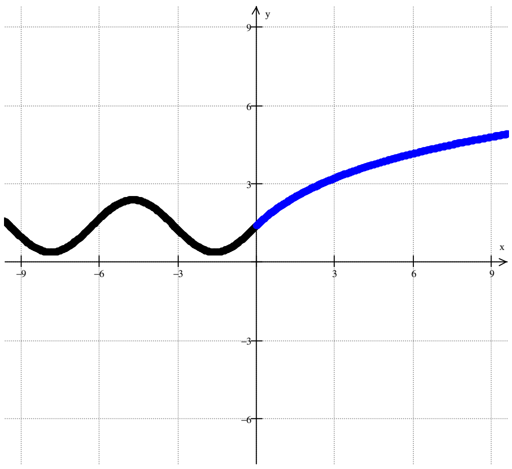
Altro modo di giungere alla stessa conclusione è quello di trovare l'asintoto obliquo della funzione $y=\sqrt{x^2-2x+4}$, ricordando la definizione di asintoto obliquo (cioè che $y=mx+q$ è asintoto obliquo se $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-(mx+q)\right)=0$) si avrà: $a=m$ *e* $b=-q$.

Quesito 2: determina i valori dei parametri a e b affinché la funzione $f_{a,b}(x)=\begin{cases} a+\sin x & se\ x<0 \\ 3b-1 & se\ x=0 \\ 2\ln(x+2) & se\ x>0 \end{cases}$ sia continua in R. Per i valori trovati, traccia il grafico della funzione.

Ricordando la definizione di funzione continua in un punto, le condizioni da porre sono: $\lim_{x\to 0^-}(a+\sin x)=\lim_{x\to 0^+} 2\ln(x+2)=3b-1$, cioè $a=2\ln 2=3b-1$ equivalente al sistema:

$\begin{cases} a=2\ln 2 \\ 3b-1=2\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\ln 4 \\ b=\dfrac{\ln 4+1}{3} \end{cases}$, con tali valori la funzione diventa: $f\ (x)=\begin{cases} \ln 4+\sin x & se\ x\le 0 \\ 2\ln(x+2) & se\ x>0 \end{cases}$.

La funzione è definita a tratti, il grafico corrispondente alle x negative si ottiene traslando verso l'alto di ln4 il grafico della funzione seno, mentre per le x positive si dilata verticalmente di 2 e si trasla a sinistra di 2 il grafico della funzione ln$x$



Quesito 3: dai la definizione di derivata di una funzione e specificane il significato geometrico. Data la funzione $y = x\ln x - 2x + 1$ determina i punti in cui la retta ad essa tangente forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il semiasse positivo delle ascisse.

La funzione derivata di una funzione *f(x)* è il limite del rapporto incrementale (se esiste finito), cioè $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, tale limite rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel generico punto di ascissa *x*.

Utilizzando le regole di derivazione del prodotto e della somma è possibile derivare la funzione data:

$$y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot 1 + 0 = \ln x - 1 .$$

Ricordando che il coefficiente angolare i una retta è la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, la richiesta del problema si può tradurre nell'equazione:

$$\ln x - 1 = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; x = e^{1+\sqrt{3}}$$

Quesito 4: dai la definizione di funzione continua in un punto x_0, quindi considera la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^3)}{1-x} & se \quad x > 1 \\ 3 & se \;\; x = 1 \\ \dfrac{\sin(2\pi x)}{e^x - e} & se \;\; x < 1 \end{cases}$ ed indica se è continua in x_0=1; in caso contrario specifica il tipo di discontinuità.

Una funzione è continua in un punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Questo significa che $x_0 \in D$ devono esistere finiti $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, essere uguali tra loro e al valore che la funzione assume in x_0.

Per stabilire se *f(x)* è continua in x_0=1, è necessario calcolare i limiti destro e sinistro:

$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x^3)}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $F.I.$ riscrivo quindi la funzione in modo da poter usare il limite notevole:

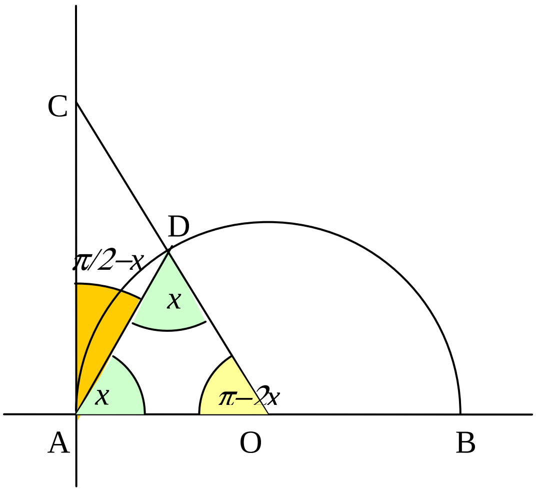
$$\frac{\ln(x^3)}{1-x} = \frac{3\ln x}{1-x} = \frac{3\ln[1+(x-1)]}{1-x} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{3\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}} = -3$$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(2\pi x)}{e^x - e} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $F.I.$ riscrivo quindi la funzione in modo da poter usare i limiti notevoli:

$$\frac{\sin(2\pi x)}{e^x - e} = \frac{\sin(2\pi x - 2\pi)}{e(e^{x-1}-1)} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{2\pi\cancel{(x-1)}}{e\cancel{(x-1)}} = \frac{2\pi}{e}$$

Poiché i limiti destro e sinistro sono finiti, ma diversi si ha una discontinuità di 1° specie.

Quesito 5: data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e centro O, considera sulla retta ad essa tangente in A, un punto C e sia D l'intersezione di OC con la semicirconferenza stessa. Posto $x = D\hat{A}O$ trova l'espressione del rapporto fra le aree dei triangoli OAC e ADC. Calcola il limite di tale espressione per $x \to 0$ (che corrisponde geometricamente a $D \to A$)



Limitazioni: l'angolo al centro varia da 0 (quando A,D, C coincidono)a $\frac{\pi}{2}$ (quando la retta tangente è parallela ad OD), di conseguenza $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$.

Dalla trigonometria:

$$f(x) = \frac{area(AOC)}{area(ADC)} = \frac{\frac{\overline{AO}\cdot\cancel{\overline{AC}}}{2}}{\frac{\overline{AD}\cdot\cancel{\overline{AC}}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AD}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

è quindi necessario determinare solo $\overline{AD}$

$\overline{AD} = 2r\cos x$ (cateto del triangolo rettangolo ABD)

la funzione da determinare e della quale calcolare il limite è quindi:

$$f(x) = \frac{\overline{AO}}{\overline{AD}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{1}{2\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Quesito 6: per ciascuna delle seguenti richieste scrivi una funzione che la soddisfi:

a) funzione con asintoto obliquo con coefficiente angolare m=2 e asintoto verticale di equazione x=2

per esempio $y = \frac{2x^2}{x-2}$

b) funzione con discontinuità di 2° specie in $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$

per esempio $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (funzione tangente dilatata orizzontalmente di 2)

c) funzione che sia un infinito del primo ordine per $x \to \infty$, ma che non ammetta asintoto obliquo.

per esempio $y = x + \sqrt[3]{x}$ (cioè un infinito del primo ordine più un infinito di ordine inferiore). Si osserva che $x + \sqrt[3]{x} \underset{x\to\infty}{\sim} x$, quindi $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x} = 1$ ma $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cancel{x} + \sqrt[3]{x} - \cancel{x}\right) = \infty$, quindi non c'è asintoto obliquo.