

**VERIFICA di MATEMATICA**

**Problema**

Considera la funzione:

$$f(x) = e^x(x^2 + x - 2)$$

- a) Fanne lo studio e traccia il grafico in un sistema di riferimento cartesiano,
- b) Deduci il grafico della funzione  $g(x) = e^{|x|}(x^2 + |x| - 2)$  ed indica quali sono i punti di non derivabilità specificandone la natura.

**Quesiti**

*Scegli e risolvi 5 tra i seguenti quesiti*

- 1) Determina i parametri reali  $a$  e  $b$  affinché il grafico della funzione  $y = x^2 + a \ln(x + b)$  passi per l'origine degli assi e presenti un minimo in  $x=1$ , specifica inoltre se  $x=1$  è un punto di minimo relativo o assoluto.

- 2) Data la funzione  $f_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{x+a} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{bx-1}{2x-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$  determina  $a$  e  $b$  in modo che sia derivabile in  $x=0$ . Traccia il grafico della funzione corrispondente ai valori di  $a$  e  $b$  trovati.

- 3) Tra tutte le piramidi quadrangolari regolari rette per le quali è costante e uguale a  $k$  la somma dell'altezza e dell'apotema, determina quella di volume massimo.
- 4) Dire se la funzione  $f(x) = e^x + 3 \arctan x$  è invertibile in tutto il suo dominio e, in caso affermativo, detta  $g(x)$  la sua inversa, trovare  $g'(1)$ .
- 5) Dimostra che la derivabilità in un punto è condizione sufficiente per la continuità nello stesso punto. Fornisci un esempio che mostri che non è vero il viceversa.
- 6) Dimostra che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e utilizza il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$ .

## Soluzioni verifica del 24 febbraio 2009

### Problema

Considera la funzione:

$$f(x) = e^x(x^2 + x - 2)$$

c) Fanne lo studio e traccia il grafico in un sistema di riferimento cartesiano,

d) Deduci il grafico della funzione  $g(x) = e^{|x|}(x^2 + |x| - 2)$  ed indica quali sono i punti di non derivabilità specificandone la natura.

- Dominio  $D = (-\infty; +\infty)$  poiché  $f(-x) = e^{-x}(x^2 - x - 2) \neq f(x) \neq -f(x)$  la funzione non è né pari né dispari
- Segno e intersezioni con gli assi:  $f(0) = -2$   $f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x(x^2 + x - 2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 1$
- Limiti agli estremi del dominio:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 + x - 2) = [0 \cdot \infty]$  F.I.,

ma  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{x^2 e^x} = \frac{x^2}{e^{-x}} \rightarrow 0^+$ . per confronto di infiniti.  $y=0$  è un asintoto orizzontale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(x^2 + x - 2) = +\infty$  poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  non c'è asintoto obliquo.

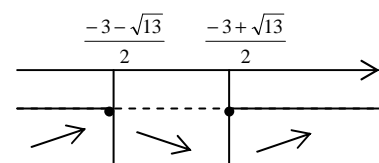
- Derivata prima e andamento della funzione:  $f'(x) = e^x(x^2 + 3x - 1)$ ,  $D' = D$

Studio il segno della derivata prima:  $f'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow e^x(x^2 + 3x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \vee x \geq \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \text{ punto di massimo } f\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right) \approx 0,21 \text{ massimo relativo}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ punto di minimo } f\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right) \approx -2,17 \text{ minimo}$$



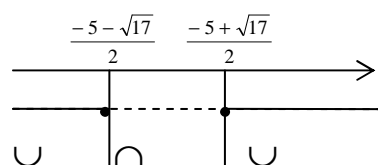
- Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = e^x(x^2 + 5x + 2)$$

Studio il segno della derivata seconda:  $f''(x) \geq 0$

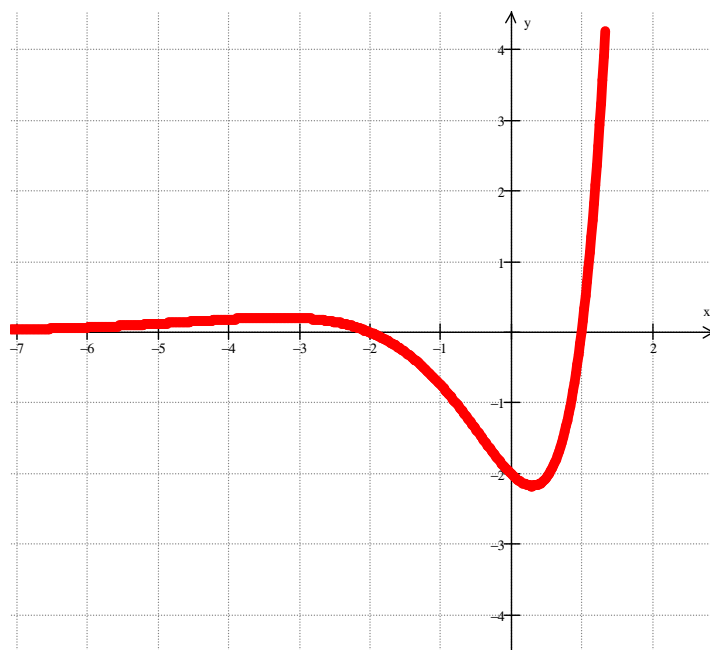
$$\Rightarrow e^x(x^2 + 5x + 2) \geq 0 \Rightarrow$$

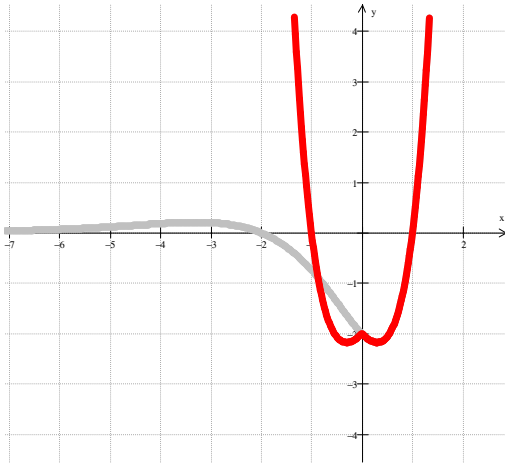
$$x \leq \frac{-5 - \sqrt{17}}{2} \vee x \geq \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$$



$$x = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}; f\left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{2}\right) \approx 0,19 \text{ flesso}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}; f\left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{2}\right) \approx -1,45 \text{ flesso}$$





Il grafico di  $g(x) = e^{|x|}(x^2 + |x| - 2)$  si deduce da quello di  $f(x)$  poiché  $g(x) = f(|x|)$ . In  $x=0$  la funzione  $g(x)$  ha un punto angoloso infatti  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$  mentre  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +2$  quindi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x)$

### Quesito 1

Determina i parametri reali  $a, b$  affinché il grafico della funzione  $y = x^2 + a \ln(x+b)$  passi per l'origine degli assi e presenti un minimo in  $x=1$ , specificare inoltre se  $x=1$  è un punto di minimo relativo o assoluto.

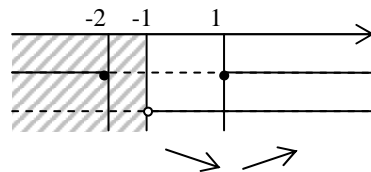
Poiché la funzione è derivabile nel suo dominio, se ha un minimo in  $x=1$  allora in  $x=1$  la derivata prima è nulla (attenzione la condizione  $f'(1)=0$  è necessaria, ma non sufficiente per garantire l'esistenza del minimo). Usando le regole di derivazione si ha:  $y' = 2x + \frac{a}{x+b}$ . Le condizioni imposte dal problema permettono quindi di impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ln b = 0 \\ 2 + \frac{a}{1+b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2 = 0 \text{ impossibile} \end{cases} \vee \begin{cases} \ln b = 0 & b = 1 \\ a = -4 \end{cases}$$

La funzione ottenuta è quindi  $y = x^2 - 4 \ln(x+1)$  con  $D = (-1; +\infty)$ . Per stabilire se  $x=1$  è un punto di minimo relativo o assoluto si può studiare il segno della derivata prima:

$$y' = 2x + \frac{-4}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{x+1} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases}$$



$x=1$  è un punto di minimo assoluto (poiché non ce ne sono altri), il minimo è  $f(1) = 1 - 4 \ln(2)$ .

### Quesito 2

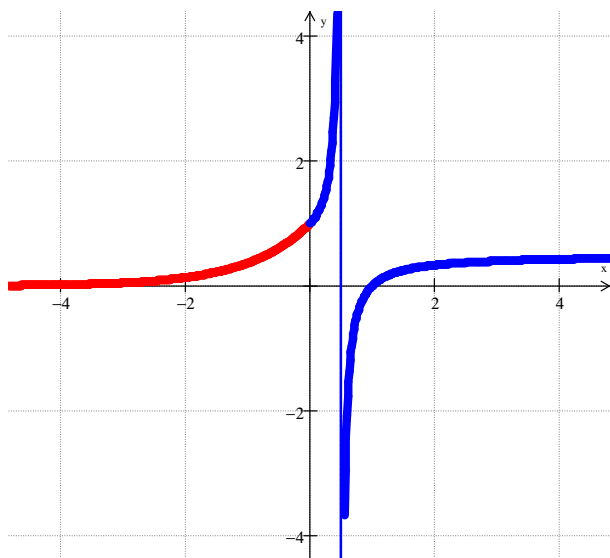
Data la funzione  $f_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{x+a} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{bx-1}{2x-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$  determina  $a$  e  $b$  in modo che sia derivabile in  $x=0$ . Traccia il grafico della funzione corrispondente ai valori di  $a$  e  $b$  trovati.

Affinché la funzione sia derivabile è necessario che sia continua, quindi le condizioni da imporre sono:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x+a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx-1}{2x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x+a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b(2x-1) - 2(bx-1)}{(2x-1)^2} \end{cases}$$

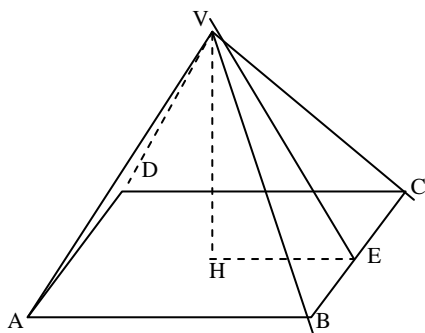
$$\begin{cases} e^a = 1 \\ e^a = 2 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione ottenuta è quindi:  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x-1}{2x-1} & \text{se } x > 0 \text{ funzione omografica con centro } C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$



### Quesito 3

Tra tutte le piramidi quadrangolari regolari rette per le quali è costante e uguale a  $k$  la somma dell'altezza e dell'apotema, determinare quella di volume massimo.



Ricordando che il volume è:  $Volume = \frac{1}{3} \overline{VH} \cdot \overline{AB}^2$

pongo  $\overline{VH} = x$  si avrà  $0 < x < \frac{k}{2}$  (quando  $x \rightarrow 0$  la piramide tende a

diventare un quadrato di diagonale  $2k$ , mentre quando  $x \rightarrow \frac{k}{2}$  la

piramide tende a ridursi ad un segmento di lunghezza  $\frac{k}{2}$ )

Poiché  $\overline{VH} + \overline{VE} = k$  si ha  $\overline{VE} = k - x$  e quindi, dal teorema di Pitagora

$\overline{HE} = \sqrt{(k-x)^2 - x^2}$ , poiché  $\overline{AB} = 2\overline{HE}$ , la funzione volume è:  $Volume = \frac{4}{3} x \cdot (k^2 - 2kx) = \frac{4}{3} (xk^2 - 2kx^2)$ .

Tale funzione è una parabola, con concavità verso il basso, il massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$$x_{\max} = \frac{k}{4} \quad Volume_{\max} = \frac{k^3}{6}$$

#### Quesito 4

Dire se la funzione  $f(x) = e^x + 3 \arctan x$  è invertibile in tutto il suo dominio e, in caso affermativo, detta  $g(x)$  la sua inversa, trovare  $g'(1)$ .

Il dominio della funzione è  $D = \mathbb{R}$  ed è derivabile essendo somma di funzioni derivabili. La derivata prima è

$f'(x) = e^x + \frac{3}{1+x^2}$ , poiché  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  la funzione è

monotona crescente e quindi invertibile. Detta  $g(x)$  la sua inversa,

per il teorema della derivata dell'inversa si ha  $g'(1) = \frac{1}{f'(x_0)}$  dove

$x_0$  è il valore in cui la funzione  $f$  vale 1, cioè soluzione

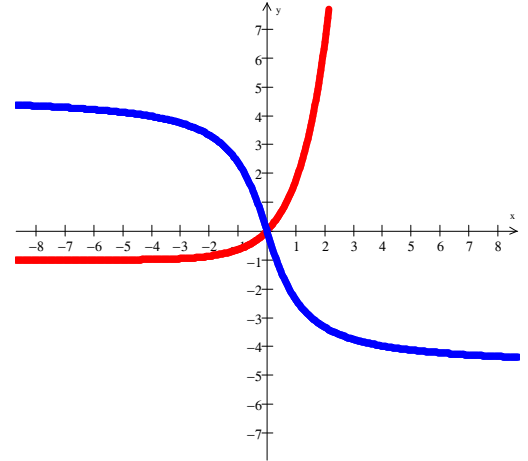
dell'equazione  $e^x + 3 \arctan x = 1$ .

Tale equazione si può risolvere graficamente tracciando i grafici

delle funzioni:  $y = e^x - 1$        $y = -3 \arctan x$ .

Oppure osservando che è verificata per  $x_0 = 0$ .

$$\text{Quindi } g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$$



#### Quesito 5

Dimostra che la derivabilità in un punto è condizione sufficiente per la continuità nello stesso punto. Fornisci un esempio che mostri che non è vero il contrario.

Hp:  $f(x)$  derivabile in  $x_0$ , cioè esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Th:  $f(x)$  è continua in  $x_0$ , cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  o equivalentemente  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Dim

Dall'identità  $f(x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$ , passando al limite si ha:

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right)$  per le proprietà del limite si può scrivere:

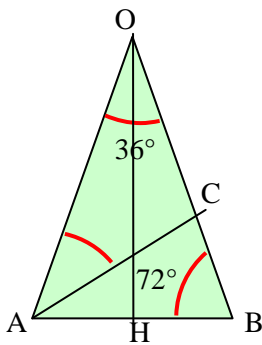
$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \text{ cioè}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f'(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) = f(x_0) \text{ c.v.d.}$$

La continuità invece non è sufficiente alla derivabilità, infatti esistono funzioni continue, ma non derivabili ad esempio  $y = |x|$  in  $x_0 = 0$  è continua, ma non derivabile perché ha un punto angoloso.

### Quesito 6

Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\sin 18^\circ$ ,  $\sin 36^\circ$ .



Un decagono regolare è costituito da 10 triangoli isosceli con angoli  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ . Tracciando la bisettrice dell'angolo in  $A$  si ottengono un triangolo isoscele  $ACO$  ed uno simile a quello dato  $ABC$ . Dalla similitudine tra  $ABO$  e  $BCO$  si deduce che:  $\overline{OB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{CB}$ , poiché però  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CO}$ , la proporzione si può scrivere come  $\overline{OB} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{CB}$  cioè il lato del decagono  $\overline{AB}$  è sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta  $\overline{OB}$ , essendo quella sua parte che è media proporzionale tra la restante parte e il tutto. Posto  $\overline{OC} = x$ , dalla proporzione si ha:  $x^2 = \overline{OB} \cdot (\overline{OB} - x)$ , quindi risolvendo l'equazione di  $2^\circ$  grado

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \overline{OB} \text{ (naturalmente il valore negativo non è accettabile).}$$

Ricordando che dato un triangolo rettangolo il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa è il seno dell'angolo

opposto si ha  $\sin(18^\circ) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ .