Nome………………..Cognome………………………… classe 4D 20 Novembre 2008

Verifica di matematica: Goniometria

1) Calcola il valore delle seguenti espressioni: (punti: 2)

a) $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ c) $tg\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ d) $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan 4\right)$

2) Considera la funzione $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$:

a) determina le intersezioni con gli assi cartesiani;

b) traccia il grafico e specifica se è una funzione invertibile (motiva la risposta) (punti: 1.75)

c) Deduci il grafico di $g(x)=\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right|$

3) Considera la funzione $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

a) determina il dominio

b) traccia il grafico (punti: 1.25)

4) Risolvi le seguenti equazioni (punti: 2)

a) $\sin^2 x+3\sin x\cos x-2=0$ b) $5\sin x-5\cos x-1=0$

c) $\sin(2x)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ d) $\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\pi\right)\right|=1$

5) Risolvi le seguenti disequazioni (punti: 1.5)

a) $\dfrac{3\cos x}{1-2\sin x}>0$ b) $\dfrac{1-\sqrt{3}\tan x}{2\cos x+1}>0$ c) $\dfrac{4\cos^2 x-3}{\sin x}\le 0$

6) Scrivi l'equazione della parabola *p* che è tangente all'asse delle ascisse nel suo punto *V* di ascissa -5 e passa per *A*(0;10). Determina sull'arco *AV* il punto *P* per cui l'area del triangolo *PAO* vale 10. (punti: 1.5)

SOLUZIONI: verifica di matematica del 20 novembre

ESERCIZIO 1 a) Calcola il valore di $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

ponendo $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ sappiamo che $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ e α è nel 1° quadrante e, usando la formula di duplicazione del seno dobbiamo calcolare $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Dall'identità goniometrica fondamentale, tenendo conto del quadrante si ha

$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\frac{2\sqrt{2}}{3}$, quindi $\sin\left(2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = +\frac{4\sqrt{2}}{9}$

ESERCIZIO 1 b) Calcola il valore di $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

ponendo $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ sappiamo che $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e α è nel 4° quadrante e, usando la formula di addizione del coseno, dobbiamo calcolare:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

Dall'identità goniometrica fondamentale, tenendo conto del quadrante si ha

$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = +\frac{2\sqrt{2}}{3}$, quindi $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$

ESERCIZIO 1 c) Calcola il valore di $tg\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

ponendo $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ sappiamo che $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ e α è nel 2° quadrante e, usando le relazioni sugli archi complementari possiamo scrivere: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot an\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Dall'identità goniometrica fondamentale, tenendo conto del quadrante si ha

$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\frac{2\sqrt{2}}{3}$, quindi $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

ESERCIZIO 1 d) Calcola il valore di $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(-4)\right)$

ponendo $\alpha = \arctan(-4)$ sappiamo che $\tan\alpha = -4$ e α è nel 4° quadrante , usando la formula di bisezione del seno e tenendo conto del quadrante possiamo scrivere: $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(-4)\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Dalla relazione tra tangente e coseno, tenendo conto del quadrante: $\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = +\frac{1}{\sqrt{17}}$, quindi

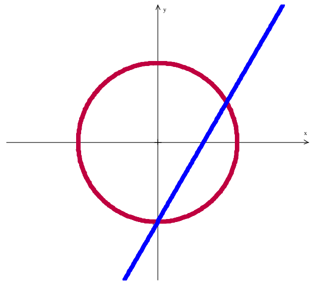
$$\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(-4)\right) = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}} = -\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{34}}$$

Esercizio 2 Considera la funzione $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x + 1$:

a) determina le intersezioni con gli assi cartesiani;

L'intersezione con l'asse delle ordinate si trova semplicemente sostituendo 0 alla *x*. Si ha così il punto A$(0;-\sqrt{3}+1)$

Per quella con l'asse delle ascisse bisogna risolvere l'equazione lineare $\sin x-\sqrt{3}\cos x+1=0$. Utilizzando per esempio il metodo della circonferenza goniometrica si ottiene:



$\begin{cases} Y=\sqrt{3}X-1 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$ che risolto dà $B:\begin{cases} X=0 \\ Y=-1 \end{cases} \vee C:\begin{cases} X=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y=\frac{1}{2} \end{cases}$, tali punti corrispondono agli angoli $B: x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \vee C: x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

b) traccia il grafico e specifica se è una funzione invertibile (motiva la risposta)

Per tracciare il grafico è necessario riscrivere il testo della funzione utilizzando il metodo dell'angolo aggiunto: $\sqrt{a^2+b^2}=2$;

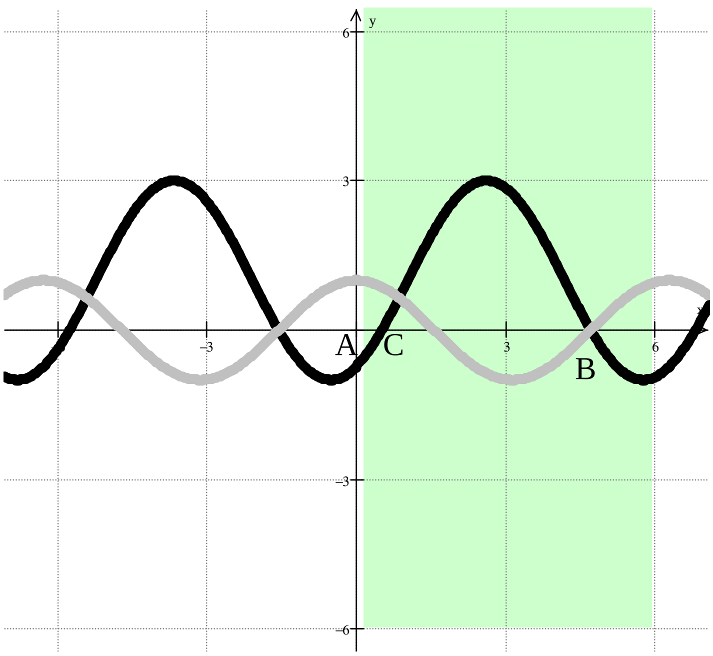
$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

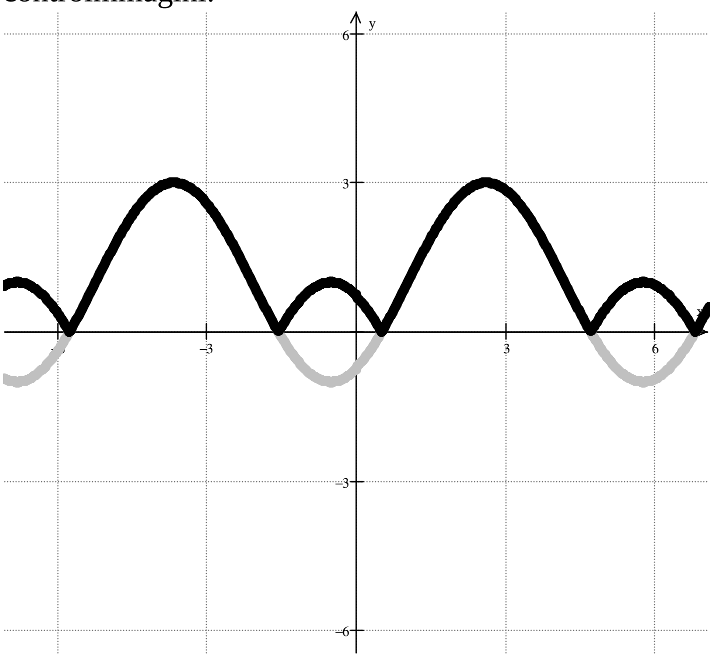
$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}$, quindi $\alpha=\frac{5}{6}\pi$

La funzione diventa quindi:

$f(x)=2\cos\left(x-\frac{5}{6}\pi\right)+1$, funzione periodica di periodo 2π (eviedenziato in verde) il cui grafico si ottiene da quello del coseno dilatato verticalmente di 2, spostando l'asse verticale a sinistra di $\frac{5}{6}\pi$ e quello orizzontale in basso di 1.

Dal grafico si nota che la funzione non è invertibile non essendo iniettiva, infatti ci sono valori di *y* ai quali corrispondono infinite controimmagini.





d) Deduci il grafico di $g(x)=\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right|$

Osservando che

$g(x)=\left|\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right|=$
$=\left|-\sqrt{3}\cos x+\sin x+1\right|=\left|f(x)\right|$ il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ ribaltando le parti negative.

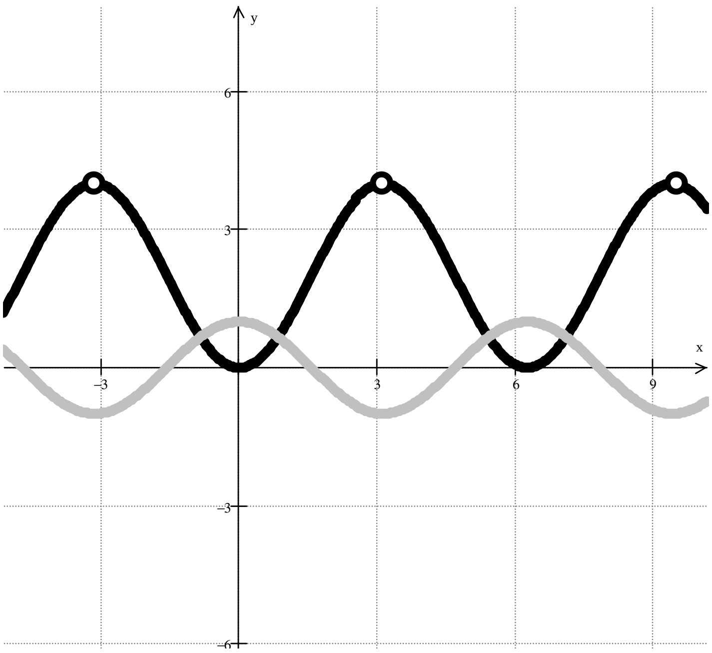
ESERCIZIO 3 Considera la funzione $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

a) determina il dominio

Poiché la funzione è fratta, è necessario imporre la condizione di esistenza, cioè il denominatore non può essere nullo: $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 0$, cioè $\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ quindi $x\neq\pi+2k\pi$

b) traccia il grafico.

Per tracciare il grafico è necessario riscrivere il testo, utilizzando innanzitutto la formula di bisezione del coseno $y=\dfrac{2\sin^2 x}{1+\cos x}$, ricordando l'identità goniometrica fondamentale e la fattorizzazione della differenza di quadrati si ottiene: $y=\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}=\dfrac{2(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{1+\cos x}}=2-2\cos x$. Quindi il grafico della funzione si ottiene da quello del coseno dilatato verticalmente di 2, facendo il simmetrico rispetto all'asse orizzontale e spostando l'asse orizzontale in basso di 2. Dato il dominio della funzione si dovranno togliere i punti di ascisse $x=\pi+2k\pi$



Esercizio 4 a) L'equazione $\sin^2 x+3\sin x\cos x-2=0$ è riconducibile ad omogenea di 2°

$\sin^2 x+3\sin x\cos x-2(\cos^2 x+\sin^2 x)=0$ sommando i termini simili si ottiene :

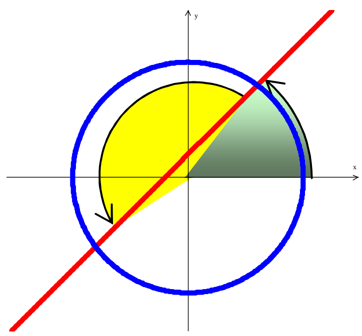
$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$, con la condizione $\cos x\neq 0$ cioè $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ si può dividere per $\cos^2 x$ e ottenere l'equazione di 2° in tangente: $\tan^2 x-3\tan x+2=0$ e quindi le due equazioni elementari $\tan x=2 \ \vee\ \tan x=1$ che risolte danno $x=\arctan 2+k\pi \ \vee\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Esercizio 4 b) L'equazione $5\sin x-5\cos x-1=0$ è lineare. Risolvendo con il metodo della circonferenza si ottiene il sistema: $\begin{cases}5Y-5X-1=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$ che risolto dà:

$A:\begin{cases}X=-\dfrac{4}{5}\\ Y=-\dfrac{3}{5}\end{cases}\vee B:\begin{cases}X=\dfrac{3}{5}\\ Y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Gli angoli corrispondenti sono

$A: x=\pi+ar\cos\left(\dfrac{4}{5}\right)+2k\pi \ \vee\ B: x=\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)+2k\pi$



Esercizio 4 c) l'equazione $\sin(2x)-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ è elementare del tipo

$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$ $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ equivale alle due equazioni algebriche:

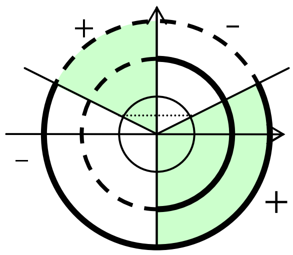
$2x = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x + x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$ che risolte danno: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

Esercizio 4 d) l'equazione $\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)\right| = 1$ è equivalente alle due equazioni elementari $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) = 1 \quad \vee \quad \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi\right) = -1$ a loro volta equivalenti a:
$\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ che risolte danno: $x = -\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = -2\pi + 2k\pi$ che volendo si può riassumere in $x = k\pi$

Esercizio 5 a) La disequazione $\frac{3\cos x}{1 - 2\sin x} > 0$ è fratta; si studiano quindi separatamente numeratore e denominatore e si fa il grafico del prodotto dei segni

$$\left| \begin{array}{l} 3\cos x > 0 \\ 1 - 2\sin x > 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \sin x < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$



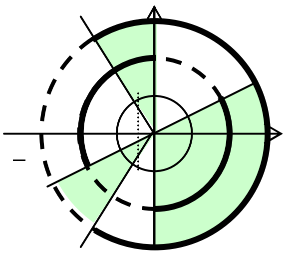
La soluzione è

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Esercizio 5 b) La disequazione $\frac{1 - \sqrt{3}\tan x}{2\cos x + 1} > 0$ è fratta; si studiano quindi separatamente numeratore e denominatore e si fa il grafico del prodotto dei segni

$$\left| \begin{array}{l} 1 - \sqrt{3}\tan x > 0 \\ 2\cos x + 1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \tan x < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$



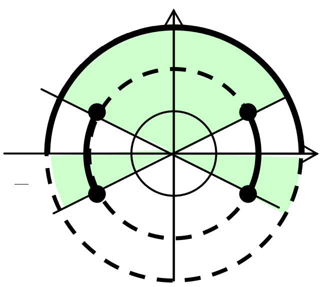
La soluzione è

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee$$
$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee$$
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Esercizio 5 c) La disequazione $\frac{4\cos^2 x - 3}{\sin x} \leq 0$ è fratta; si studiano quindi separatamente numeratore e denominatore e si fa il grafico del prodotto dei segni

$$\left| \begin{array}{l} 4\cos^2 x - 3 \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x > 0 \end{array} \right.$$



La soluzione è

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < 2k\pi \quad \vee$$
$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee$$
$$\pi + 2k\pi < x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 6 Scrivi l'equazione della parabola *p* che è tangente all'asse delle ascisse nel suo punto *V* di ascissa -5 e passa per *A*(0;10). Determina sull'arco *AV* il punto *P* per cui l'area del triangolo *PAO* vale 10.

La parabola *p* ha asse verticale (dovendo essere tangente all'asse delle ascisse), poiché il vertice è V(-5;0), apparterrà al fascio $y = a(x+5)^2$, imponendo l'appartenenza di *A*(0;10) si trova il valore del parametro *a*:

$A \in p \quad 10 = a(0+5)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{5}$ quindi $p: \; y = \frac{2}{5}(x+5)^2 = \frac{2}{5}x^2 + 4x + 10$

Il punto P , dovendo appartenere all'arco AV della parabola avrà coordinate $\left(x; \frac{2}{5}x^2 + 4x + 10 \right)$ con $-5 \le x \le 0$.

Affinché il triangolo PAO di base $\overline{AO} = 10$ e altezza $\overline{PH} = -x$ abbia area 10 deve verificarsi che:

$\frac{\overline{AO} \cdot \overline{PH}}{2} = 10 \;\Rightarrow\; \frac{10(-x)}{2} = 10 \quad x = -2$ il punto P ha quindi coordinate $\left(-2; \frac{18}{5} \right)$