Nome…………………………….Cognome…………………… 18 Ottobre 2008 Classe 4G

Verifica di matematica: Goniometria

A) Traccia i grafici delle seguenti funzioni:

1) $y = \arccos|x-2|$ 2) $y = \frac{1}{4} - \arctan(x)$ 3) $y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$

4) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 5) $y = |\tan x| + 1$ 6) $y = 2\arcsin(-x)$

B) Calcola i valori delle seguenti espressioni:

1) $\sin(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right))$ 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\pi\right)$

3) $\tan\left(\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ 4) $\cos(\arctan 7 - 3\pi)$

5) Calcola $\sin\alpha$, sapendo che $\tan\alpha = \frac{2}{7}$ e che $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

6) Calcola $\cos\alpha$, sapendo che $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ e che $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

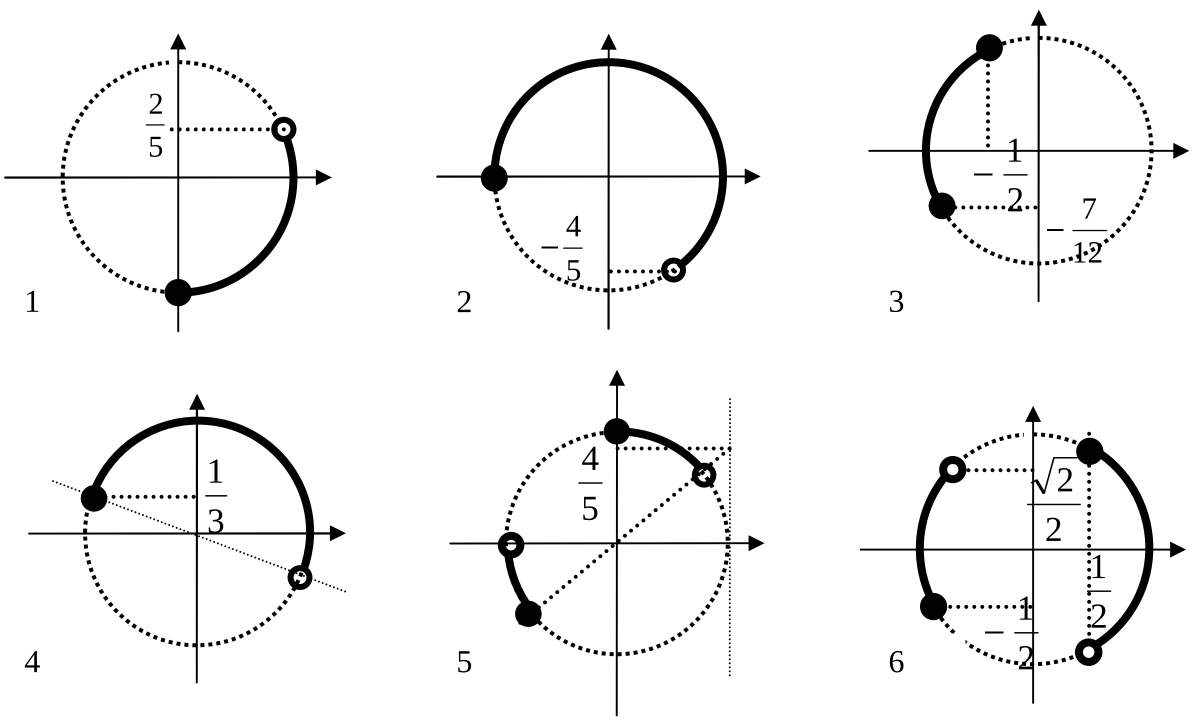
C) Risolvi le seguenti disequazioni elementari

1) $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sin x \ge -\frac{1}{2}$ 5) $\tan x \le -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 6) $\tan x > 1$

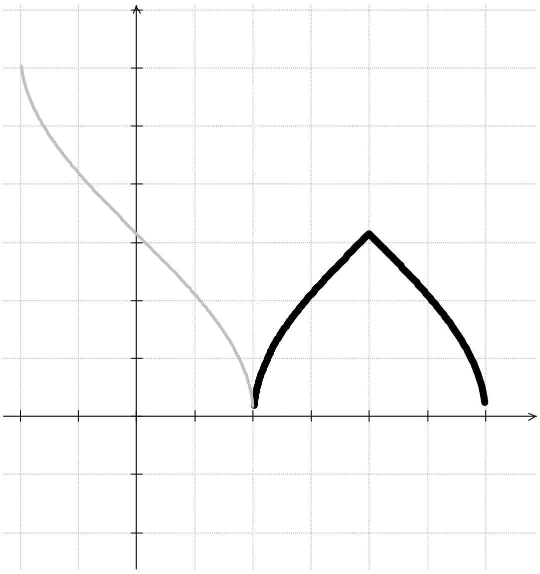
7) $\cos x \le -\frac{2}{5}$ 8) $\sin x \le -\frac{2}{5}$

D) Scrivi gli angoli corrispondenti agli archi individuati nelle seguenti figure:



SOLUZIONI Verifica di matematica: Goniometria   18 Ottobre 2008 Classe 4G

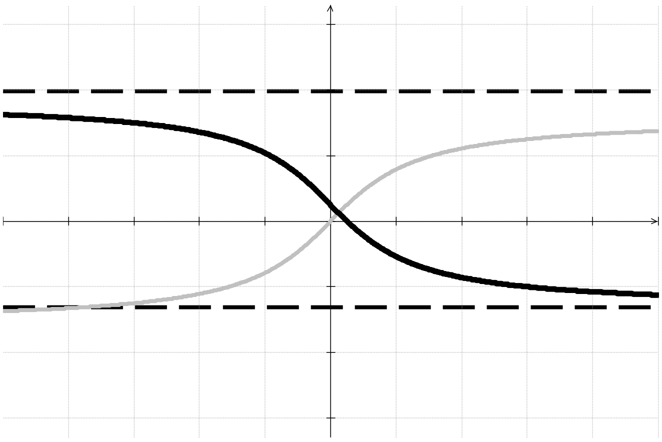
Esercizio A1



Il grafico di $y = \arccos|x-2|$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

- traccio il grafico di $y = \arccos x$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = \arccos|x|$ (evidenzio i punti con le x positive e i rispettivi simmetrici rispetto all'asse delle ordinate)
- deduco il grafico di $y = \arccos|x-2|$ (sposto l'asse verticale a sinistra di 2)

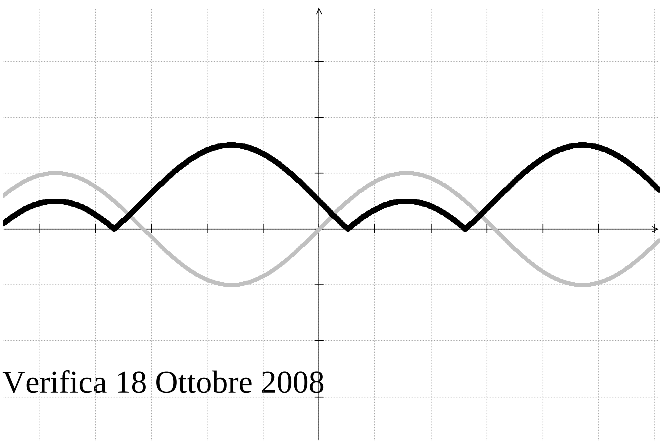
Esercizio A2



Il grafico di $y = \frac{1}{4} - \arctan x$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

- traccio il grafico di $y = \arctan x$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = -\arctan x$ (facendo il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse)
- deduco il grafico di $y = \frac{1}{4} - \arctan x$ (spostando l'asse orizzontale in basso di $\frac{1}{4}$)

Esercizio A3

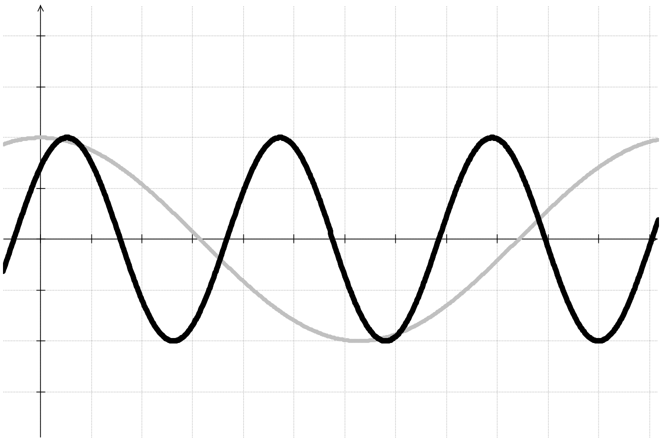


Il grafico di $y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

- traccio il grafico di $y = \sin x$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = \sin x - \frac{1}{2}$ (spostando l'asse delle ascisse in alto di $\frac{1}{2}$)

- deduco il grafico di $y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ (ribaltando le parti negative)

Esercizio A4

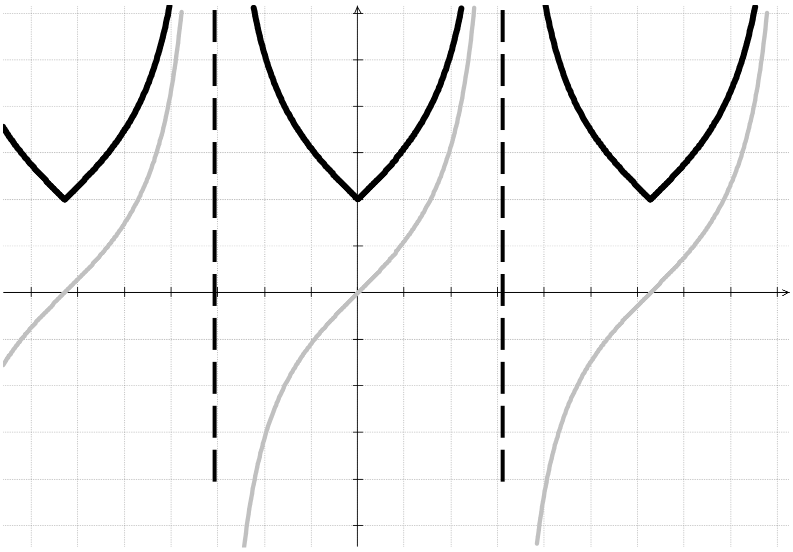


Il grafico di $y = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

riscrivo la funzione come $y = \cos 3(x - \frac{\pi}{12})$

- traccio il grafico di $y = \cos x$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = \cos(3x)$ (contraendo orizzontalmente di 3 il grafico di cosx)
- deduco il grafico di $y = \cos 3(x - \frac{\pi}{12})$ (spostando l'asse verticale a sinistra di $\frac{\pi}{12}$)

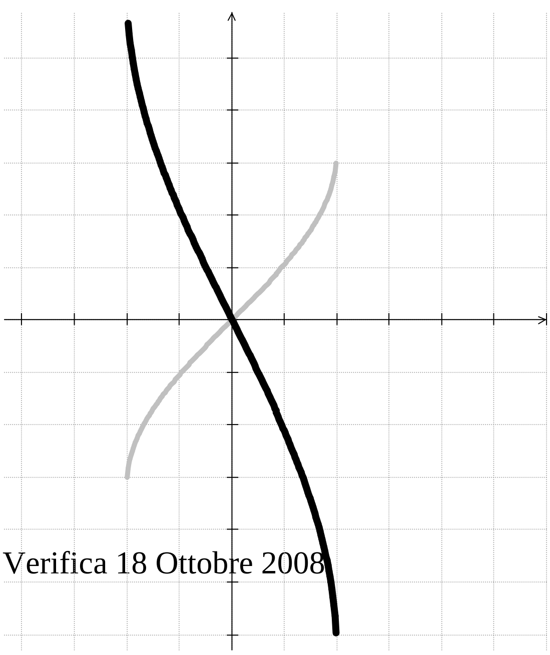
Esercizio A5



Il grafico di $y = |\tan x| + 1$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

- traccio il grafico di $y = \tan x$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = |\tan x|$ (ribaltando le parti negative)
- deduco il grafico di $y = |\tan x| + 1$ (spostando l'asse orizzontale in basso di 1)

Esercizio A6



Il grafico di $y = 2\arcsin(-x)$ (in nero) si ottiene nel modo seguente:

- traccio il grafico di $y = \arcsin(x)$ (in grigio)
- deduco il grafico di $y = \arcsin(-x)$ (facendone il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse)
- deduco il grafico di $y = 2\arcsin(-x)$ (dilatando verticalmente di 2)

Esercizio B1 $\sin(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)) = \frac{3}{\sqrt{13}}$

ponendo $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ si deve determinare $\sin(\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)) = \sin(\pi - \alpha)$

sapendo che $\tan\alpha = \frac{3}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

usando le relazioni sugli archi associati $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

usando la relazione che lega il seno alla tangente:

$$\sin\alpha = \boxed{+}\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$ (l'angolo è nel 1° quadrante, quindi il seno è positivo)

Esercizio B2 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{1}{3}$

ponendo $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ si deve determinare $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos(\alpha + \frac{3}{2}\pi)$

sapendo che $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

usando le relazioni sugli archi complementari: $\cos(\alpha + \frac{3}{2}\pi) = +\sin\alpha = -\frac{1}{3}$

Esercizio B3 $\tan\left(\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -2\sqrt{2}$

ponendo $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ si deve determinare $\tan(\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)) = \tan(\pi + \alpha)$

sapendo che $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ e $0 \le \alpha \le \pi$

usando le relazioni sugli archi associati $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

usando la relazione che lega la tangente al seno e al coseno e quella che lega il coseno al seno:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\boxed{+}\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = -2\sqrt{2}$$ (l'angolo è nel 2° quadrante, quindi il seno è positivo)

Esercizio B4 $\cos(\arctan 7 - 3\pi) = -\frac{1}{\sqrt{50}}$

ponendo $\alpha = \arctan(7)$ si deve determinare $\cos(\arctan(7) - 3\pi) = \cos(\alpha - 3\pi)$

sapendo che $\tan\alpha = 7$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

usando le relazioni sugli archi associati $\cos(\alpha - 3\pi) = -\cos\alpha$

usando la relazione che lega il coseno alla tangente:

$$\cos\alpha = \boxed{+}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$ (l'angolo è nel 1° quadrante, quindi il coseno è positivo)

Esercizio B5 Calcola $\sin\alpha$, sapendo che $\tan\alpha = \frac{2}{7}$ e che $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

usando la relazione che lega il seno alla tangente:

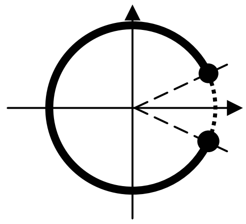
$$\sin\alpha = \boxed{-}\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{53}}$$ (l'angolo è nel 3° quadrante, quindi il seno è negativo)

Esercizio B6 Calcola $\cos\alpha$, sapendo che $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ e c3he $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

usando la relazione che lega il coseno al seno:

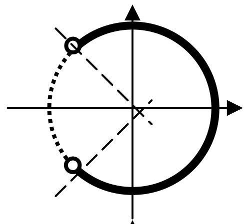
$\cos\alpha = \boxed{+}\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ (l'angolo è nel 4° quadrante, quindi il coseno è positivo)

Esercizio C1 $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$



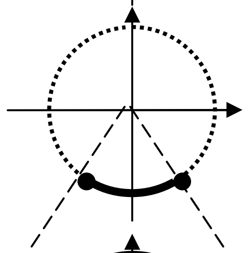
$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

Esercizio C2 $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



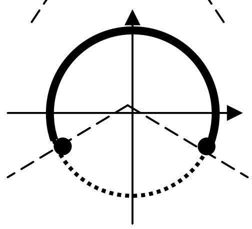
$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

Esercizio C3 $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$



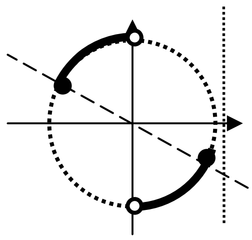
$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

Esercizio C4 $\sin x \ge -\frac{1}{2}$



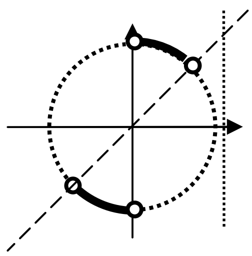
$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

Esercizio C5 $\tan x \le -\frac{1}{\sqrt{3}}$



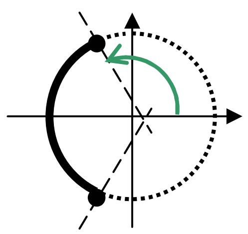
$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \le -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Esercizio C6 $\tan x > 1$



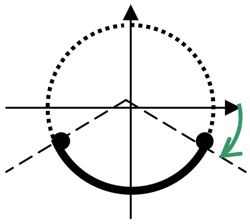
$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Esercizio C7 $\cos x \le -\frac{2}{5}$



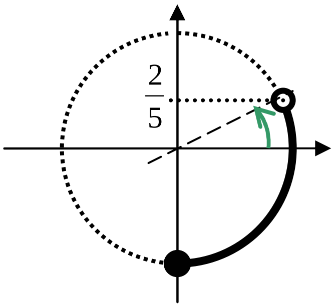
$\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi \le x \le 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$

Esercizio C8 $\sin x \le -\frac{2}{5}$



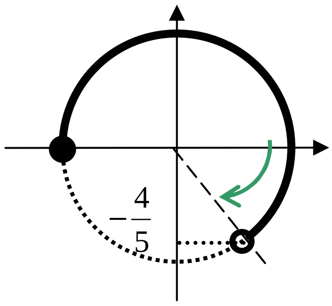
$$\pi + \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi \le x \le 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$$

Esercizio D1



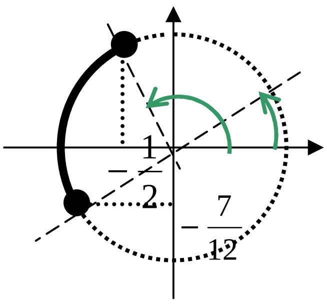
$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \alpha < \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$$

Esercizio D2



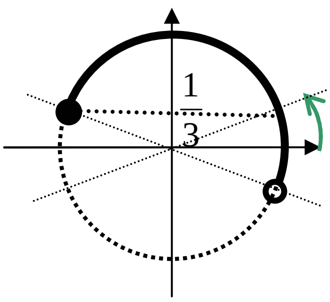
$$\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi < \alpha \le \pi + 2k\pi$$

Esercizio D3



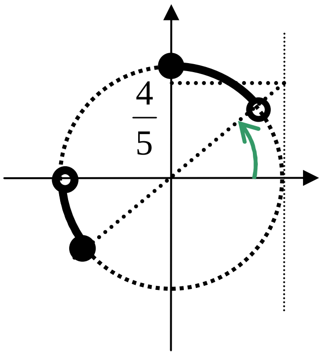
$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \le \alpha \le \pi + \arcsin\left(\frac{7}{12}\right) + 2k\pi$$

Esercizio D4



$$-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi < \alpha \le \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi$$

Esercizio D5

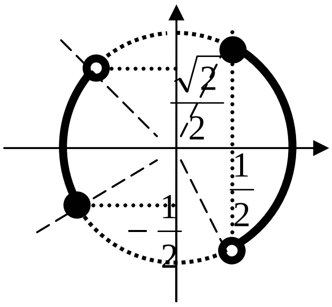


$$\arctan\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi<\alpha\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\vee$$

$$\pi+2k\pi<\alpha\leq\pi+\arctan\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi$$

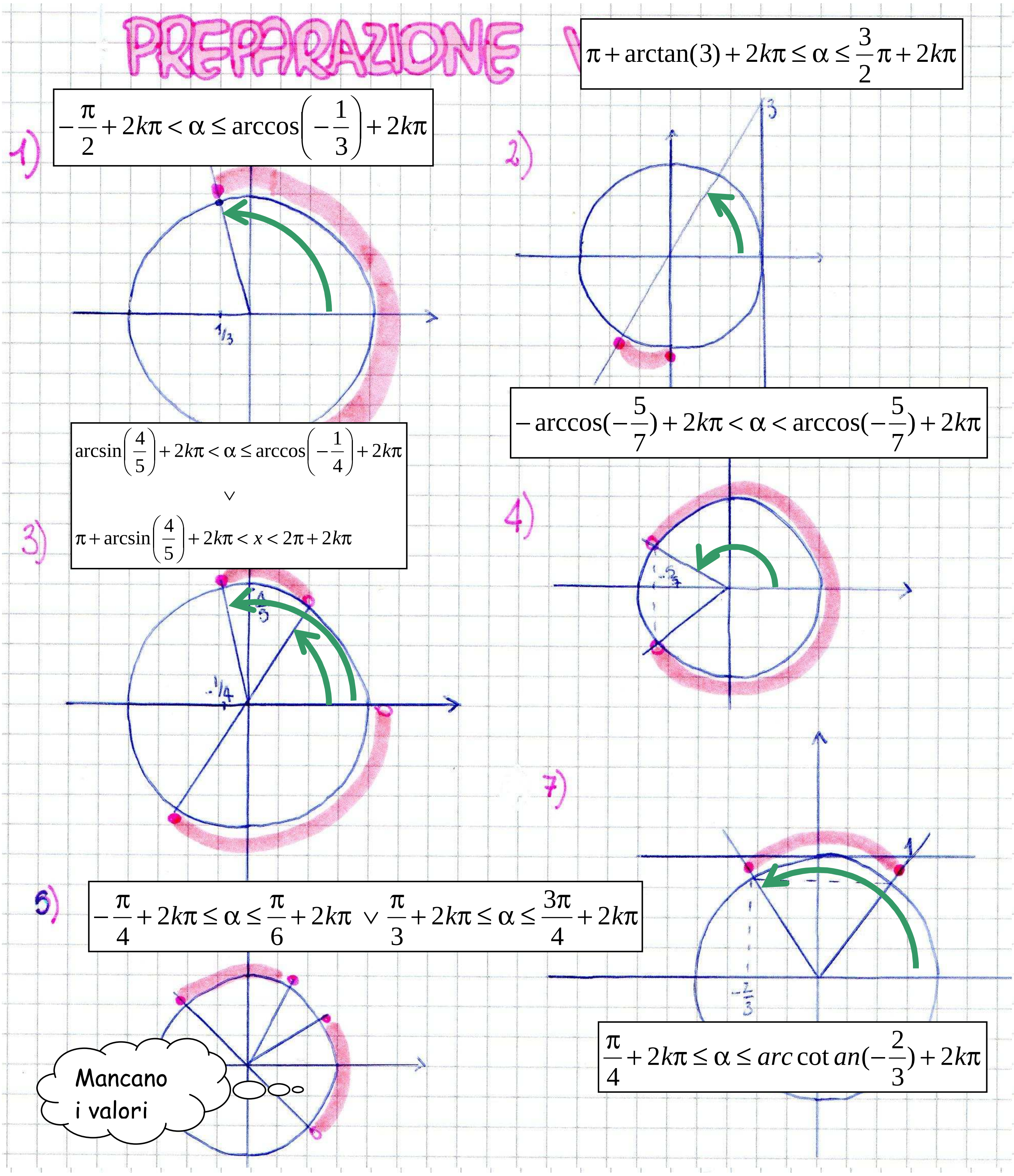
Esercizio D6



$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<\alpha\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\vee$$

$$\frac{3}{4}\pi+2k\pi<\alpha\leq\frac{7}{6}\pi+2k\pi$$



$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha\le\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi$$

$$\pi+\arctan(3)+2k\pi\le\alpha\le\frac{3}{2}\pi+2k\pi$$

$$\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi<\alpha\le\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi$$

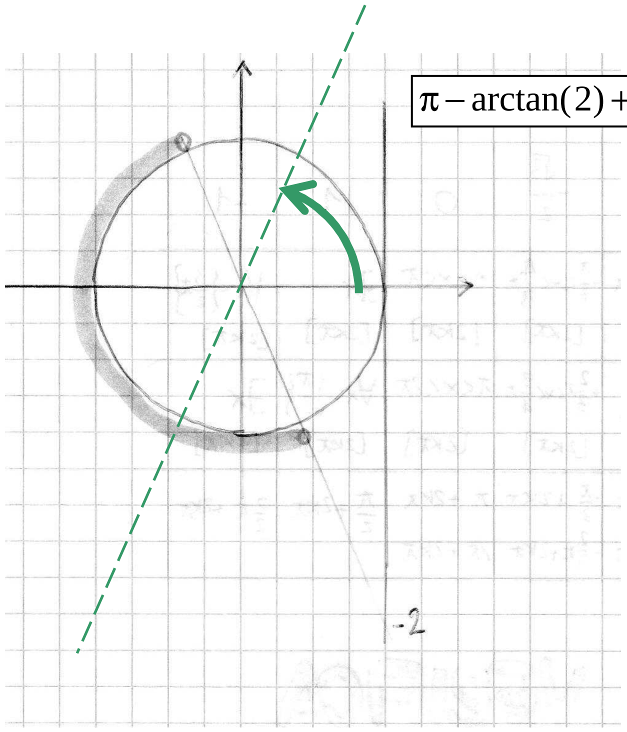
$$\vee$$

$$\pi+\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$$

$$-\arccos(-\frac{5}{7})+2k\pi<\alpha<\arccos(-\frac{5}{7})+2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\alpha\le\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\alpha\le arc\cot an(-\frac{2}{3})+2k\pi$$



$$\boxed{\pi - \arctan(2) + 2k\pi \le \alpha \le 2\pi - \arctan(2) + 2k\pi}$$