Nome…………………….Cognome…………………. 18 Dicembre 2008 Classe 4G

VERIFICA di MATEMATICA

A) Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche

1) $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\sqrt{2}$ (punti: 0.5) 2) $\frac{2|\sin x|-1}{1-|\tan x|}\leq 0$ (punti: 0.5)

3) $\frac{\cos x+\sin x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}\leq 0$ (punti:0,5) 4) $3\tan^2 x+2\tan x-1>0$ (punti: 0.5)

5) $\sqrt{3-4\sin^2 x}>\cos x$ (punti: 1) 6) $2\sin x\cos x+\cos(2x)\geq 3$ (punti: 0.5)

B) Dai la definizione di seno, coseno e tangente e traccia i grafici delle corrispondenti funzioni. (punti: 1)

Partendo da tali grafici, indica quante soluzioni hanno le seguenti equazioni (motiva la tua risposta)

1) $\cos x=2x$ 2) $\sin x=x^2$ 3) $\tan x=\frac{x}{2}$ (punti: 0.75)

C) Per ciascuna della seguenti funzioni:

1) $y=\cos\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$ (punti: 0.75) 2) $y=\cos(3x)+\sin(3x)-1$(punti: 0.75)

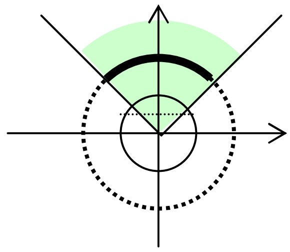
3) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ (punti: 0.75) 4) $y=\frac{\sin(2x)-1}{\cos x-\sin x}$ (punti: 1)

a) indica se sono periodiche e in caso affermativo specifica il periodo.
b) determina le intersezioni con l'asse delle ascisse;
c) traccia il grafico

D) Per ciascuna richiesta scrivi l'espressione analitica di una funzione goniometrica che la soddisfi e tracciane il grafico
a) funzione sempre positiva con asintoti di equazione $x=\pi+2k\pi$ con $k\in Z$ (punti: 0.5)
b) funzione dispari, periodica di periodo 3π (punti: 0.5)
c) funzione con dominio $[1;3]$ (punti: 0.5)

Soluzioni verifica di matematica 4G 18 dicembre 2008

Esercizio A1: risolvi la disequazione: $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$



Si tratta di una disequazione elementare (eventualmente ponendo $z=\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$, si risolve quindi guardando la circonferenza goniometrica.

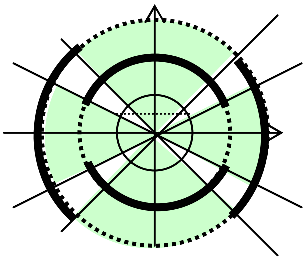
Si ha: $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ quindi risolvendo:

$\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\leq x\leq\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$

Esercizio A2: risolvi la disequazione: $\frac{2|\sin x|-1}{1-|\tan x|}\leq 0$

E' una disequazione fratta, bisogna quindi studiare il segno del numeratore e del denominatore e fare poi il prodotto dei segni:

$$\left|\begin{array}{l}2|\sin x|-1\geq 0\\ 1-|\tan x|>0\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}|\sin x|\geq\frac{1}{2}\\ |\tan x|<1\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\sin x\leq-\frac{1}{2}\ \vee\ \sin x\geq\frac{1}{2}\\ -1<\tan x<1\end{array}\right.$$

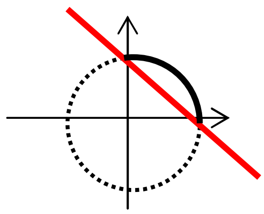


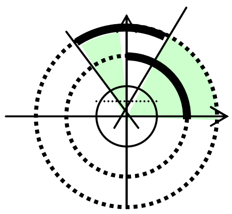
La soluzione è: $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+k\pi \quad\vee\quad \frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$

Esercizio A3: risolvi la disequazione: $\frac{\cos x+\sin x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}\leq 0$

La disequazione è fratta, bisogna quindi studiare il segno del numeratore e del denominatore e fare poi il prodotto dei segni: $\left|\begin{array}{l}\cos x+\sin x-1\geq 0\\ 2\sin x-\sqrt{3}>0\end{array}\right.$ la prima disequazione è lineari, la seconda elementare. Per risolvere la prima il metodo più veloce è il secondo studiato, anche perché la retta corrispondente è associata ad angoli noti. Posto $\cos x = X$ e $\sin x = Y$ si hanno infatti i seguenti sistemi misti :

$$\begin{cases}Y\geq 1-X\\ X^2+Y^2=1\end{cases}$$

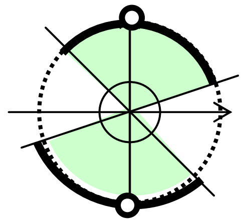




La soluzione è: $0+2k\pi\leq x<\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad\vee\quad \frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ oppure

Esercizio A4: risolvi la disequazione $3\tan^2 x+2\tan x-1>0$

La disequazione è di secondo grado in tan *x*, risolvendo l'equazione associata si ottiene: $\tan x=\frac{1}{3}\ \vee\ \tan x=-1$, si tratta di due equazioni elementari, dei risultati bisogna fare l'unione. La soluzione è: $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad\wedge\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$



(infatti la funzione tangente non è definita in $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$)

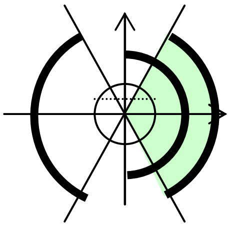
Esercizio A5: risolvi la disequazione $\sqrt{3-4\sin^2 x}>\cos x$

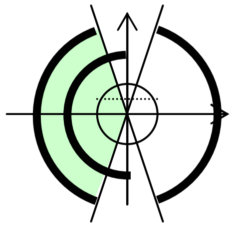
La disequazione è irrazionale nella sola funzione coseno, del tipo radice quadrata maggiore di…, si risolve quindi con due sistemi:

$$\begin{cases}\cos x \geq 0 & (\textit{condizione di concordanza})\\ 3-4\sin^2 x > \cos^2 x\end{cases} \vee \begin{cases}\cos x < 0\\ 3-4\sin^2 x \geq 0 & (\textit{condizione di esistenza})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \geq 0\\ 3-4\sin^2 x > 1-\sin^2 x\end{cases} \vee \begin{cases}\cos x < 0\\ \sin^2 x \leq \dfrac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x \geq 0\\ \sin^2 x < \dfrac{2}{3}\end{cases} \vee \begin{cases}\cos x < 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x \geq 0\\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}} < \sin x < \sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{cases} \vee \begin{cases}\cos x < 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$





La soluzione della disequazione è:

$$-\arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2k\pi < x < \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2k\pi \quad \vee \quad \frac{2}{3}\pi+2k\pi < x < \frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

Esercizio A 6 risolvi la disequazione $2\sin x\cos x+\cos(2x)\geq 3$

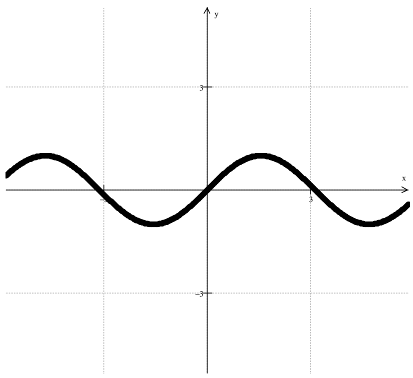
Utilizzando la formula di duplicazione del coseno e l'identità goniometrica fondamentale si ottiene una disequazione omogenea di 2° grado: $2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x \geq 3\cos^2 x+3\sin^2 x$

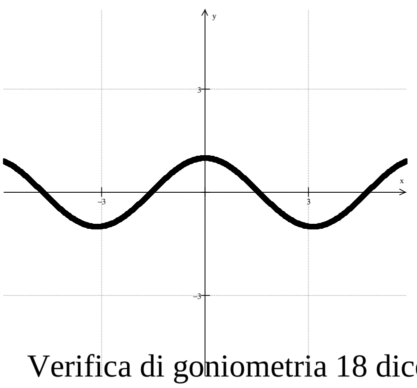
$4\sin^2 x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x \leq 0$ con la condizione $\cos x \neq 0$ cioè $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ si ottiene la

disequazione di secondo grado in tangente: $2\tan^2 x-\tan x+1\leq 0 \Rightarrow$ poiché il discriminante è negativo e verso della disequazione e segno del coefficiente di secondo grado sono discordi, la disuguaglianza non è mai verificata $\nexists x \in R$

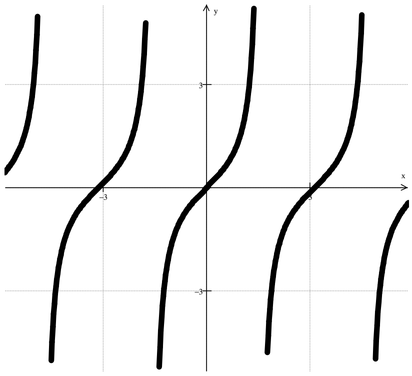
Esercizio B Dai la definizione di seno, coseno e tangente e traccia i grafici delle corrispondenti funzioni.

Il seno di un angolo è l'ordinata del punto sulla circonferenza goniometrica individuato dall'angolo. La funzione seno così definita $f: \ R \rightarrow [-1;1]$ è suriettiva, ma non iniettiva; è una funzione periodica di periodo 2π, dipari.



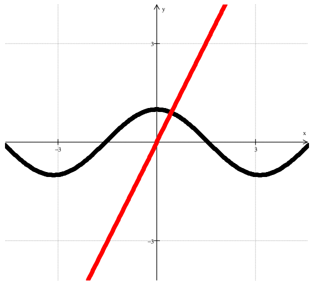


Il coseno di un angolo è l'ascissa del punto sulla circonferenza goniometrica individuato dall'angolo. La funzione coseno così definita $f: \ R \rightarrow [-1;1]$ è suriettiva, ma non iniettiva; è una funzione periodica di periodo 2π, pari.

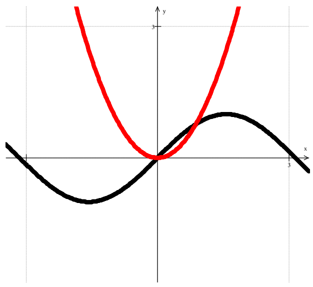


La tangente di un angolo è l'ordinata del punto di intersezione tra la retta corrispondente all'angolo e la retta di equazione x=1. La funzione tangente così definita $f: \; R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to R$ è suriettiva, ma non iniettiva; è una funzione periodica di periodo π, dipari.

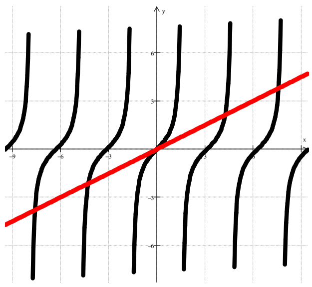
1) $\cos x = 2x$ 2) $\sin x = x^2$ 3) $\tan x = \frac{x}{2}$



Esercizio B 1 Indica quante soluzioni ha l' equazione $\cos x = 2x$**.**
L'equazione può essere risolta graficamente, tacciando i grafici delle funzioni: $y = \cos x$ e $y = 2x$. Le soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve, in questo caso, c'è un solo punto d'intersezione e quindi una sola soluzione.

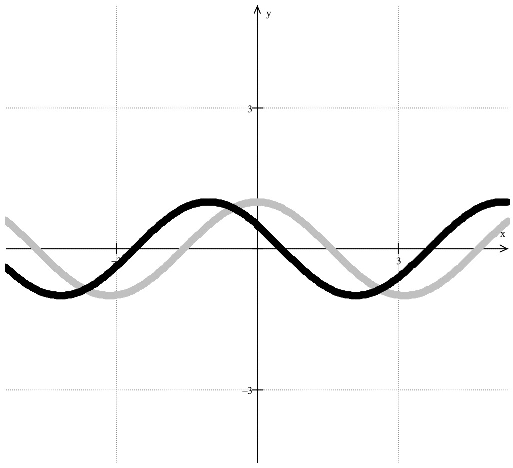


Esercizio B 2 Indica quante soluzioni ha l' equazione $\sin x = x^2$**.**
L'equazione può essere risolta graficamente, tacciando i grafici delle funzioni: $y = \sin x$ e $y = x^2$. Le soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve (ricorda che la funzione seno nell'origine è tangente alla bisettrice del primo terzo quadrante), in questo caso ci sono due punti d'intersezione e quindi due soluzione, una delle quali è esattamente x=0



Esercizio B 3 Indica quante soluzioni ha l' equazione $\tan x = \frac{x}{2}$
L'equazione può essere risolta graficamente, tacciando i grafici delle funzioni: $y = \tan x$ e $y = \frac{x}{2}$. Le soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve, in questo caso ce ne sono infinite, una di queste è 0.

Esercizio C1: $y=\cos\left|x+\frac{\pi}{3}\right|$



- E'una funzione periodica di periodo 2π (vedi il grafico)
- Intersezione con l'asse delle ascisse:

  $\cos\left|x+\frac{\pi}{3}\right|=0$ è un'equazione elementare

  $\left|x+\frac{\pi}{3}\right|=\frac{\pi}{2}+k\pi$ il secondo membro rappresenta un numero positivo se $k\in N$, quindi $x+\frac{\pi}{3}=\pm(\frac{\pi}{2}+k\pi)$

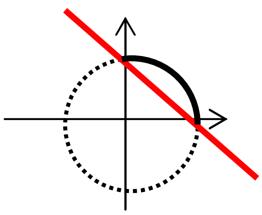
  $x=-\frac{\pi}{3}\pm(\frac{\pi}{2}+k\pi)$
- Il grafico si ottiene da quello del modulo di cos*x* seno, traslando l'asse verticale a destra di $\frac{\pi}{3}$. (Poiché la funzione coseno è pari $\cos|x|=\cos x$)

Esercizio C2: $y=\cos(3x)+\sin(3x)-1$

- E' una funzione periodica di periodo $\frac{2}{3}\pi$ (vedi il grafico)
- Intersezione con l'asse delle ascisse:

  $\cos(3x)+\sin(3x)-1=0$ è un'equazione lineare. Posto $\cos(3x)=X$ e $\sin(3x)=Y$ si ha il sistema :

$$\begin{cases} Y=1-X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$



la soluzione è: $3x=2k\pi \quad \vee \quad 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ quindi

$x=\frac{2}{3}k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$

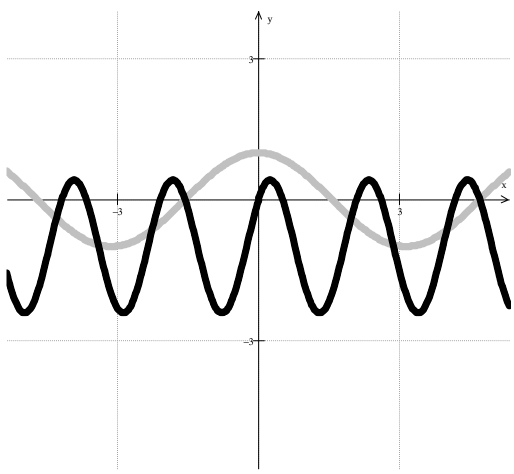
- Per tracciare il grafico si utilizza il metodo dell'angolo aggiunto:

$y=\cos(3x)+\sin(3x)-1=\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})-1=\sqrt{2}\cos 3(x-\frac{\pi}{12})-1$ (si traccia il grafico del coseno compresso orizzontalmente di 3 e dilatato verticalmente di $\sqrt{2}$, si sposta l'asse verticale spostato a sinistra di $\frac{\pi}{12}$ e quello orizzontale in alto di 1.

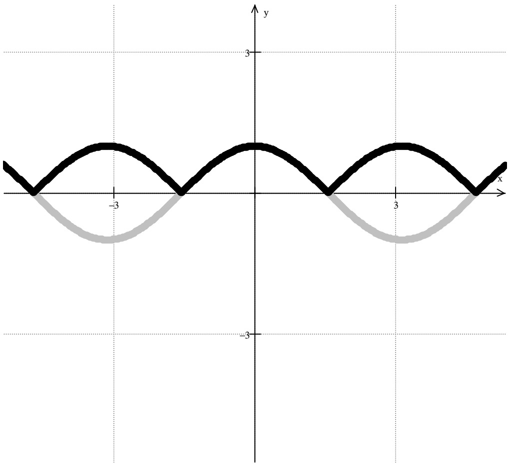
$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$

$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Esercizio C3: $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$



- E' una funzione periodica di periodo π (vedi il grafico)
- Intersezione con l'asse delle ascisse:

  $\sqrt{1-\sin^2 x} = 0 \Rightarrow 1-\sin^2 x = 0 \;\Rightarrow\; \sin x = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

  .
- Per tracciare il grafico è necessario riscrivere il testo, ricordando l'identità goniometrica fondamentale: $y = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.

Ora si traccia il grafico del coseno e si ribaltano le parti negative rispetto all'asse delle ascisse.

Esercizio C4: $y = \dfrac{\sin(2x)-1}{\cos x - \sin x}$

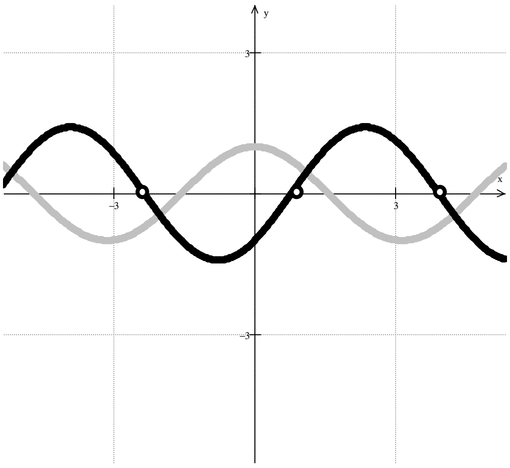
- E' una funzione periodica di periodo 2π (vedi il grafico)
- Intersezione con l'asse delle ascisse: $\dfrac{\sin 2x - 1}{\cos x - \sin x} = 0$ è un'equazione fratta, equivalente a:

  $\sin(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con la condizione $\cos x - \sin x \neq 0$, quindi nessuno dei valori trovati è accettabile.
- Per tracciare il grafico è necessario prima semplificare. Utilizzando l'identità goniometrica fondamentale e la formula di duplicazione del seno si ha:

  $$y = \frac{2\sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{-(\cos x - \sin x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\cos x - \sin x}} = \sin x - \cos x \text{ con la condizione}$$

  $\cos x - \sin x \neq 0 \;\Rightarrow\; \tan x \neq 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

  Il grafico di $y = -\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{3\pi}{4})$ si ricava con il metodo dell'angolo aggiunto:

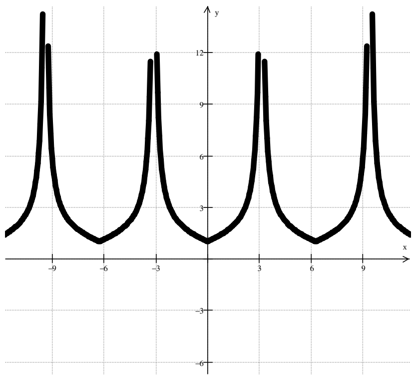


  $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$

  $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

  $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

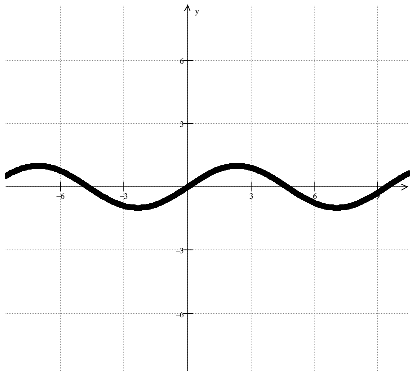
Esercizio D 1 Scrivi l'espressione analitica di una funzione goniometrica sempre positiva con asintoti di equazione $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in Z$



Per esempio $y = 1 + \left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

Esercizio D 2 Scrivi l’espressione analitica di una funzione goniometrica dispari, periodica di periodo 3π

Per esempio $y = \sin(\frac{2}{3}x)$



Esercizio D 3 Scrivi l’espressione analitica di una funzione goniometrica funzione con dominio $[1;3]$

Per esempio $y = \arcsin(x-2)$