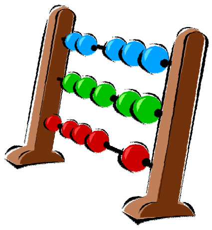
Nome…………………………Cognome………………. 27 Ottobre 2008 Classe 5D



**Verifica di matematica: i limiti**

**A**) Calcola i seguenti limiti e verificali utilizzando la definizione

1) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 + x - 5\right) =$ 2) $\lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) =$

**B**) Elenca le sette forme di indecisione:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**C)** Calcola i seguenti limiti (giustifica i passaggi):

**1)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x-1} - \sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3}} =$

**2)** $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 1} =$

**3)** $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{1-\cos(2x)} =$

**4)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1} - x}{2x}$

**5)** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 5x^2 + 6x} =$

**6)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - x^7 + 5x - 3}{e^{3x} - 7x^8 + 2} =$

**7)** $\lim_{x \to 2^+} x e^{\frac{3}{2-x}} =$

**8)** $\lim_{x \to +\infty} 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5x}\right) =$

**D**) Enuncia il teorema di unicità e fornisce l'esempio di una funzione che per $x \to 3$ non ammette limite, spiega se questo è in contrasto con il teorema enunciato.

## Esercizio A1

Per calcolare il valore del limite è sufficiente sostituire il valore 1 al posto della *x* all'interno della funzione (perché le funzioni polinomiali sono continue).

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-5\right)=-3$$

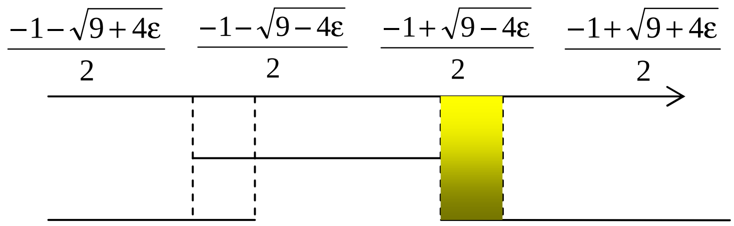
Per verificarlo è necessario utilizzare la definizione di limite finito per x che tende a un valore finito.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0 \mid \forall x\in I_{\delta_\varepsilon}(1) \ \Rightarrow\ (x^2+x-5)\in I_\varepsilon(-3)$, cioè

$$-3-\varepsilon<x^2+x-5<-3+\varepsilon \qquad \begin{cases} x^2+x-5<-3+\varepsilon \\ x^2+x-5>-3-\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-2-\varepsilon<0 \\ x^2+x-2+\varepsilon>0 \end{cases}$$

risolvendo le due equazioni associate (ricordando che ε è una quantità positiva piccola) si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2} \\ x<\dfrac{-1-\sqrt{9-4\varepsilon}}{2} \vee x>\dfrac{-1+\sqrt{9-4\varepsilon}}{2} \end{cases}$$




Poiché tra le soluzioni c'è un intorno di 1 (qualunque ε scelto), il limite è verificato

## Esercizio A2

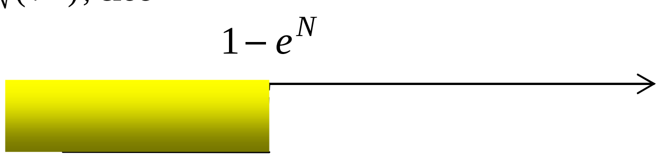
Per calcolare il valore del limite è sufficiente sostituire $-\infty$ al posto della x all'interno della funzione e ricordare le relazioni nell'insieme $R^*$ (in particolare che $\ln(+\infty)=+\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)=+\infty$$

Per verificarlo è necessario utilizzare la definizione di limite infinito per x che tende ad infinito.

$\forall N>0\ \exists M_N>0 \mid \forall x\in I_{M_N}(-\infty)\ \Rightarrow\ \ln(1-x)\in I_N(+\infty)$, cioè

$$\ln(1-x)>N \qquad 1-x>e^N \qquad x<1-e^N$$




Poiché la soluzione è un intorno di $-\infty$ (qualunque N scelto), il limite è verificato.

## Esercizio B

Elenca le sette forme di indecisione

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\infty-\infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ | $0\cdot\infty$ | $\infty^0$ | $0^0$ | $1^0$ |

## Esercizio C1

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}=\left[\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right]\ FI$$

A numeratore c'è una forma di indecisione di tipo $\infty-\infty$, per risolverla la prima cosa sarebbe vedere se c'è un infinito di ordine maggiore: le due radici sono però entrambe infiniti del primo ordine ed entrambe asintotiche a x. Una cosa analoga succede a denominatore. Per risolvere il limite è necessario razionalizzare, sia il numeratore sia il denominatore.

$$\frac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}=\frac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{4+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}=$$

$$=\frac{x^2+5x-1-(4+x^2)}{x-(x-3)}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{4+x^2}}=\frac{5x+3}{3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{4+x^2}}$$

Ora, per calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ si può utilizzare l'asintotico:

$$\frac{5x+3}{3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+5x-1}+\sqrt{4+x^2}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{5x}{3}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{2x}=\frac{5\sqrt{x}}{3}\to+\infty$$

## Esercizio C2

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\ FI$$

per eliminare la forma di indecisione cerco di sfruttare il fatto che sin(infinitesimo) ~ infinitesimo. Utilizzando gli archi associati posso scrivere $\sin(\pi x)=\sin(\pi-\pi x)$, osservo inoltre che quando $x\to1$ la quantità $(\pi-\pi x)\to0$, quindi $\sin(\pi-\pi x)\underset{x\to1}{\sim}(\pi-\pi x)$.

$$\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}\underset{x\to1}{\sim}\frac{-\pi\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{-\pi}{(x+1)}\to-\frac{\pi}{2}$$

## Esercizio C3

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\cos(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\ FI$$

riscrivo la funzione fattorizzando il numeratore (differenza di cubi)

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\cos(2x)}$$

Utilizzo poi il limite notevole per cui: $1-\cos(\text{inf initesimo})\sim\frac{1}{2}(\text{inf initesimo})^2$

Quindi: $$\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\cos(2x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\frac{1}{2}x^2(1+\cos x+\cos^2 x)}{\frac{1}{2}(2x)^2}=\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{4}\to\frac{3}{4}$$

## Esercizio C4

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-x}{2x}=\left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right]FI$$

A numeratore c'è una forma di indecisione di tipo $\infty-\infty$, per risolverla la prima cosa sarebbe vedere se c'è un infinito di ordine maggiore: i due addendi sono però infiniti del primo ordine ed entrambi asintotici ad x.. Per risolvere il limite è necessario razionalizzare il numeratore ricordando lo sviluppo delle differenza tra cubi.

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-x}{2x}=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-x}{2x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}=\frac{\cancel{x^3}+1-\cancel{x^3}}{2x(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)}$$

Ora, per calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ si può utilizzare l'asintotico

$$\frac{1}{2x(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{6x^3}\to 0$$

## Esercizio C5

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-5x^2+6x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

trattandosi di un'espressione algebrica, posso fattorizzare a numeratore e a denominatore e poi semplificare. Per il denominatore raccolgo prima x e poi sfrutto la regola del trinomio particolare.

$$\frac{x^2-4}{x^3-5x^2+6x}=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x^2-5x+6)}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(x-3)}\underset{x\to2}{\longrightarrow}-2$$

## Esercizio C6

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-x^7+5x-3}{e^{3x}-7x^8+2}=\left[\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right]$$

Sia a numeratore, sia a denominatore è possibile individuare l'infinito di ordine maggiore:

$$\frac{e^{2x}-x^7+5x-3}{e^{3x}-7x^8+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{2x}}{e^{3x}}=e^{-x}\to0^+$$

## Esercizio C7

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to2^+}xe^{\frac{3}{2-x}}=2\cdot e^{\frac{3}{0^-}}=2\cdot e^{-\infty}=0^+$$ (non c'è alcuna forma di indecisione)

## Esercizio C8

Per calcolare il limite la prima cosa da fare è sostituire

$$\lim_{x\to+\infty}3x^2\cdot\sin\left(\frac{2}{5x}\right)=[\infty\cdot0]\ \ FI$$

Osservo che quando $x\to+\infty$ $\frac{2}{5x}\to0$ pertanto $\sin\left(\frac{2}{5x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{5x}$.

Quindi: $3x^2\cdot\sin\left(\frac{2}{5x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}3x^2\cdot\frac{2}{5x}=\frac{6x}{5}\to+\infty$

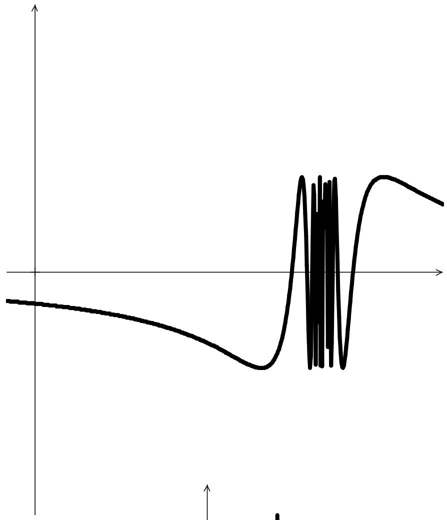
## Esercizio D

Enuncia il teorema di unicità e fornisce l'esempio di una funzione che per $x \to 3$ non ammette limite, spiega se questo è in contrasto con il teorema enunciato.

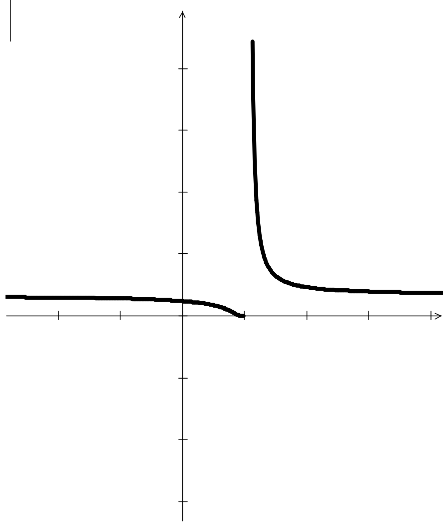
*Enunciato*

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, tale limite è unico

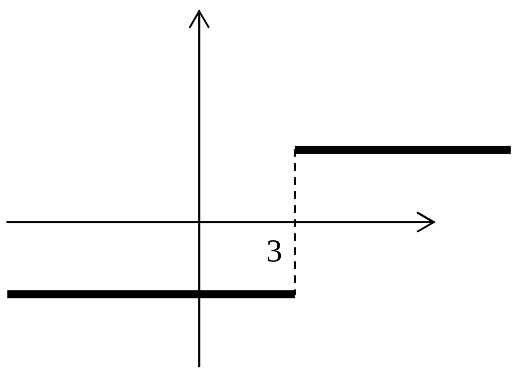
Il teorema quindi non garantisce l'esistenza del limite, ma ne afferma l'unicità, non è cioè possibile che una funzione abbia due limiti distinti per $x \to x_0$. Esistono però funzioni che non ammettono limite per $x \to x_0$ o perché il limite da destra è diverso da quello da sinistra, o perché proprio non esiste né quello da destra né quello da sinistra.



Un esempio di funzione che non ammette limite per $x \to 3$ è $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-3}\right)$, infatti sostituendo ad *x* il valore 3 si otterrebbe $\sin(\infty)$ che non esiste, essendo la funzione periodica.



Un altro esempio può essere dato da $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$, infatti nel calcolare il limite per $x \to 3$ è necessario distinguere tra $x \to 3^+$ e $x \to 3^-$: $\lim_{x \to 3^+} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{+\infty} = +\infty$, mentre $\lim_{x \to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{-\infty} = 0^+$, quindi $\lim_{x \to 3} e^{\frac{1}{x-3}}$ non esiste.




Un esempio ancora più semplice è $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ che in effetti è uguale a $f(x) = \begin{cases} +1 & se\ x > 3 \\ -1 & se\ x < 3 \end{cases}$, quindi non esiste $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$, poiché il limite destro è diverso da quello sinistro.