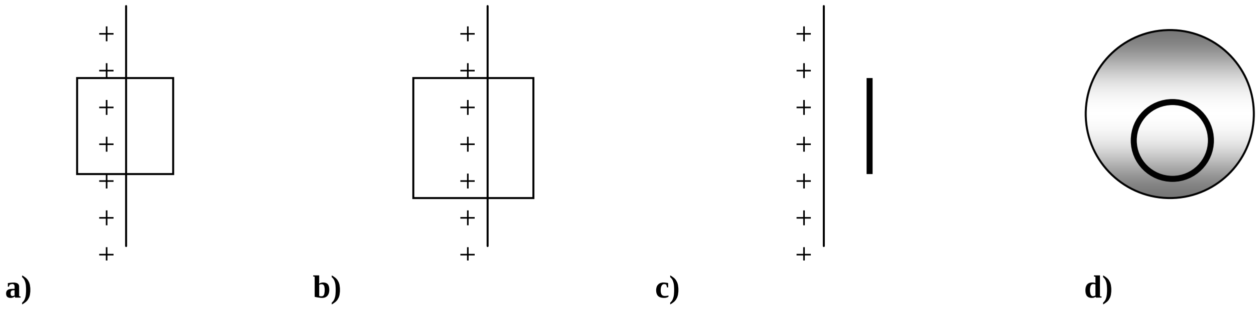
Nome…………………..Cognome………………. classe 5D 29 Novembre 2008

VERIFICA di FISICA: Elettrostatica
Domande

1) Dai la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Enuncia il teorema di Gauss per il campo elettrico (senza dimostrarlo) e calcola il flusso attraverso le superfici nelle quattro situazioni rappresentate in figura.

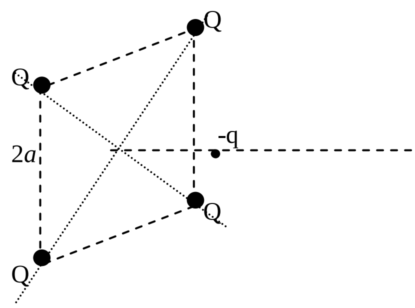
a) Sorgente: filo infinito con densità lineare $\lambda=10^{-5}$C/m
Superficie: cubo di spigolo L=20 cm
b) Sorgente: piano infinito con densità superficiale $\sigma=10^{-7}$C/m^2 (punti 2.5)
Superficie: cubo di spigolo L=20 cm
c) sorgente: Piano infinito con densità lineare $\sigma=10^{-5}$C/m^2
Superficie: Quadrato di lato L=20 cm parallelo al piano
d) sorgente: Sfera di raggio R_1=20 cm carica uniformemente con carica Q=10^{-5}C
Superficie: Sfera di raggio R_2=10 cm



2) Dai la definizione di potenziale e specifica il legame con il campo elettrico. Note le superfici equipotenziali di una distribuzione di cariche quali informazioni si hanno sul campo elettrico (dimostra le tue affermazioni) (punti 2)

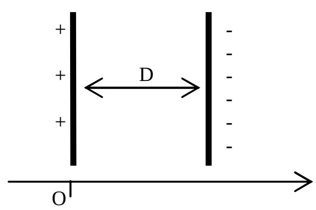
Problemi

1) Considera quattro cariche puntiformi identiche +Q disposte ai vertici di un quadrato di lato 2a. Calcola in funzione della posizione, il potenziale da esse generato in un generico punto dell'asse passante per il centro della quadrato e perpendicolare al piano da essa individuato. Una carica di prova –q e massa m si trova, inizialmente ferma su tale asse a distanza a dal centro del quadrato; lasciata libera di muoversi, con che velocità raggiungerà il centro del quadrato ? (punti 2)



2) I due piani infiniti in figura posti a distanza D, sono carichi uniformemente con densità superficiale rispettivamente pari a σ_1=+σ e σ_2= - 2σ:

- determina il campo elettrico in funzione della posizione e rappresenta la funzione ottenuta;
- traccia le linee di campo
- determina il potenziale (scelto come riferimento un punto sul primo piano) e rappresenta la funzione ottenuta. (punti: 2,5)



Ricorda che $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\dfrac{C^2}{Nm^2}$ e che $k = 9\cdot 10^9\,\dfrac{Nm^2}{C^2}$

Soluzioni: verifica di elettrostatica del 29 /11/08

Domanda n. 1

Dai la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Enuncia il teorema di Gauss per il campo elettrico (senza dimostrarlo) e calcola il flusso attraverso le superfici nelle quattro situazioni rappresentate in figura.

Il flusso di un campo vettoriale $\vec{A}$ attraverso una superficie è dato dalla somma dei flussi infinitesimi, ciascuno dei quali è il prodotto scalare tra il campo e il vettore superficie infinitesima (vettore orientato perpendicolarmente alla superficie stessa, con verso arbitrario se la superficie è aperta, con verso uscente se la superficie è chiusa). Utilizzando l'integrale si può scriver: $\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

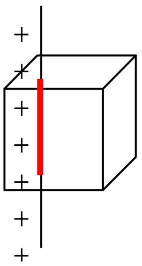
Il flusso è una grandezza scalare che indica qualitativamente il numero di linee di campo che attraversano una data superficie. L'unità di misura del flusso dipende da quella del campo; nel caso del flusso di un campo elettrico l'unità di misura sarà: $\frac{Nm^2}{C}$ oppure Vm.

Il teorema di Gauss dice che nel vuoto il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale al rapporto tra la carica interna e la costante dielettrica del vuoto: $\Phi_{Schiusa}(\vec{E}) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0}$

Applicazione a)

Sorgente: filo infinito con densità lineare $\lambda=10^{-5}$C/m

Superficie: cubo di spigolo L=20 cm



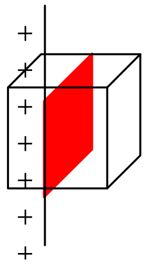
Si può applicare il teorema di Gauss, trattandosi di una superficie chiusa:

$$\Phi_{cubo}(\vec{E}) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = 2{,}26 \cdot 10^5 \frac{Nm^2}{C}$$

Applicazione b)

Sorgente: piano infinito con densità superficiale $\sigma=10^{-7}$C/m^2

Superficie: cubo di spigolo L=20 cm



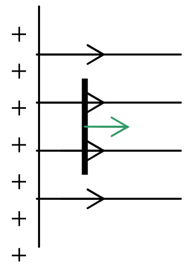
Si può applicare il teorema di Gauss, trattandosi di una superficie chiusa:

$$\Phi_{cubo}(\vec{E}) = \frac{\sigma L^2}{\varepsilon_0} = 4{,}52 \cdot 10^2 \frac{Nm^2}{C}$$

Applicazione c)

sorgente: Piano infinito con densità lineare $\sigma=10^{-5}$C/m^2

Superficie: Quadrato di lato L=20 cm parallelo al piano



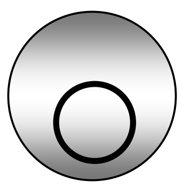
Poiché la superficie non è chiusa non si può applicare il teorema di Gauss, ma bisogna utilizzare la definizione di flusso (nel caso di campo uniforme e superficie piana). Nota l'espressione del campo elettrico generato da un piano infinito $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ si ha:

$$\Phi_{piano}(\vec{E}) = |\vec{E}| L^2 \cos 0° = \frac{\sigma L^2}{2\varepsilon_0} = 2{,}26 \cdot 10^4 \frac{Nm^2}{C}$$

Applicazione d)

sorgente: Sfera di raggio R_1=20 cm carica uniformemente con carica Q=10^{-5}C

Superficie: Sfera di raggio R_2=10 cm



Si può applicare il teorema di Gauss, trattandosi di una superficie chiusa:

$$\Phi_{sfera}(\vec{E}) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{Q \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}{\varepsilon_0} = 1{,}41 \cdot 10^5 \frac{Nm^2}{C}$$

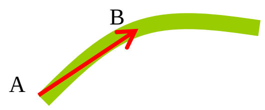
Domanda n. 2
Dai la definizione di potenziale e specifica il legame con il campo elettrico. Note le superfici equipotenziali di una distribuzione di cariche quali informazioni si hanno sul campo elettrico (dimostra le tue affermazioni)

Il potenziale dovuto ad una distribuzione di carica in un punto *P* generico è per definizione il rapporto tra l'energia potenziale che in quel punto avrebbe una carica di prova *q* e la carica di prova stessa. Data la definizione di energia potenziale è possibile definire il potenziale come il lavoro del campo elettrico dal punto *P* considerato al punto P_0 scelto come riferimento. Il potenziale è una grandezza scalare che si misura in *J/C=volt*

$V(P)=\dfrac{E_p(P)}{q}=\int_{PP_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ quindi si può anche scrivere $V(A)-V(B)=\int_{AB}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

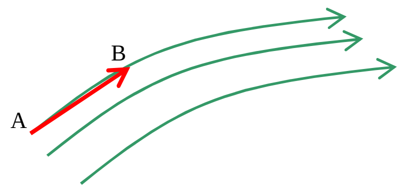
Il campo elettrico ha sempre direzione perpendicolare alle superfici equipotenziali e va verso potenziali minori. Per dimostrare queste due affermazioni è sufficiente considerare la relazione tra campo e potenziale prima considerando due punti vicini sulla stessa superficie equipotenziale (a), poi due punti su una stessa linea di campo (b)

Dim a)



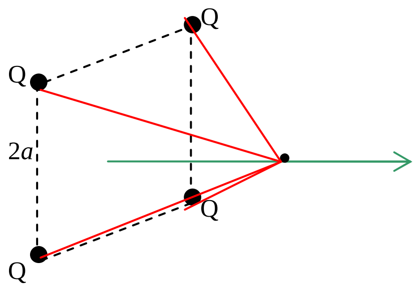
Se A e B sono sulla stessa superficie equipotenziale: $0=V(A)-V(B)=\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB}$ ma il prodotto scalare è nullo se i due vettori sono perpendicolari, quindi $\vec{E}\perp\overrightarrow{AB}$

Dim b)

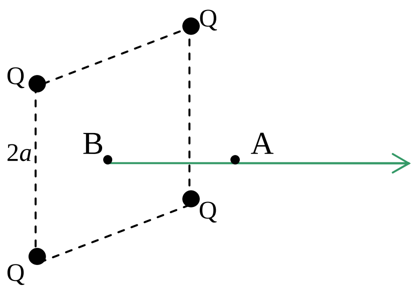


Se A e B sono sulla stessa linea di campo ed il vettore $\overrightarrow{AB}$ è ne verso del campo si ha: $V(A)-V(B)=\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB}=|\vec{E}||\overrightarrow{AB}|\cos 0°>0$ quindi $V(A)>V(B)$

Problema n. 1
Considera quattro cariche puntiformi identiche +*Q* disposte ai vertici di un quadrato di lato 2*a*. Calcola in funzione della posizione, il potenziale da esse generato in un generico punto dell'asse passante per il centro della quadrato e perpendicolare al piano da essa individuato.
Una carica di prova –*q* e massa m si trova, inizialmente ferma su tale asse a distanza *a* dal centro del quadrato; lasciata libera di muoversi, con che velocità raggiungerà il centro del quadrato ?



Le quattro cariche si trovano tutte alla stessa distanza dal generico punto *P* sull'asse, detta *x* la coordinata del punto sull'asse, la distanza tra la generica sorgente e il punto *P* è: $r=\sqrt{x^2+2a^2}$. Nota l'espressione del potenziale generato da N sorgenti puntiformi ($V=\sum_{i=1}^{N}\frac{kQ_i}{r_i}$) si ha $V=\dfrac{4kQ}{\sqrt{x^2+2a^2}}$



Una carica di prova –q, soggetta alla sola azione della forza elettrica dovuta alle quattro cariche sorgenti, conserva la propria energia meccanica. Ricordando che $V=\dfrac{E_P}{q_{prova}}$ si avrà che $E_P=q_{prova}V$, espressione comoda avendo già trovato il potenziale e osservando che nel punto *A* *x*=*a*, nel punto *B* *x*=0.
La relazione $E_M(A)=E_M(B)$ diventa un'equazione

nell'incognita v:

$$0+\frac{4kQ(-q)}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{4kQ(-q)}{a\sqrt{2}}$$ esplicitando la velocità al quadrato si ottiene:

$$v^2=\frac{8kQq}{ma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$, trattandosi di una quantità positiva se ne può fare la radice quadrata:

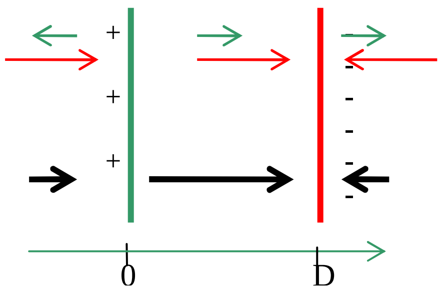
$$v=\sqrt{\frac{8kQq}{ma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Problema n. 2

I due piani infiniti in figura posti a distanza D, sono carichi uniformemente con densità superficiale rispettivamente pari a σ_1=+σ e σ_2= - 2σ:

- determina il campo elettrico in funzione della posizione e rappresenta la funzione ottenuta;
- traccia le linee di campo
- determina il potenziale (scelto come riferimento un punto sul primo piano) e rappresenta la funzione ottenuta.

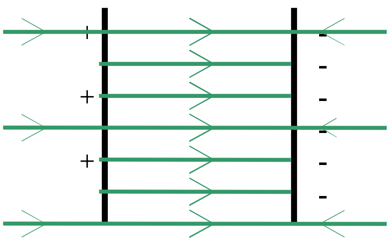
Per determinare il campo elettrico è sufficiente utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti e ricordare che un piano infinito crea un campo uniforme perpendicolare al piano, di modulo pari alla densità superficiale fratto 2ε_0 , uscente se la sorgente è positiva, entrante se la sorgente è negativa.



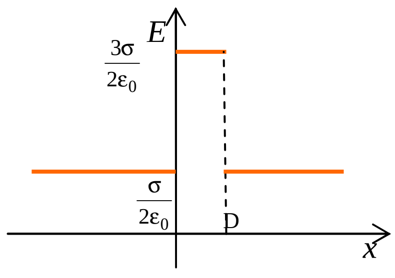
Il modulo del campo elettrico è:

$$|\vec{E}|=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & se\ \ x<0 \vee x>D\\[2mm] \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0} & se\ \ 0<x<D\end{cases}$$

Le linee di campo sono:



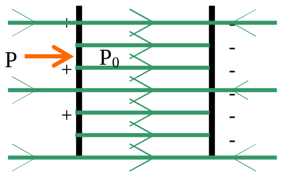
Il grafico del modulo del campo è:



In corrispondenza dei piani carichi superficialmente si ha una discontinuità.

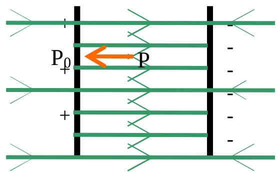
Prima ancora di fare i calcoli, ricordando il legame tra campo e potenziale (in particolare che muovendosi nel verso del campo si va verso potenziali minori), si può concludere che la funzione potenziale sarà decrescente da $-\infty$ a D e crescente da D a $+\infty$. Per il calcolo di V bisogna ricordare la definizione: $V(P)=\int_{PP_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ e distinguere 3 casi

Se $x<0$



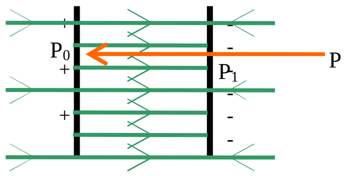
$$V=\left|\vec{E}\right|\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cos 0°=$$
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

Se $0<x<D$



$$V=\left|\vec{E}\right|\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\cos 180°=$$
$$=-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}|x|=-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

Se $x>D$



$$V=\left|\vec{E}\right|\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\cos 0°+\left|\vec{E}\right|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cos 180°=$$
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x-D)-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}D$$

Quindi il grafico è: