

VERIFICA di MATEMATICA**Disequazioni**

1) $2 \left| \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right| - 1 < 0$

2) $\frac{2 - \sqrt{3} \sin x \cos x}{2 \cos x + \sqrt{3}} \geq 0$

3) $\frac{\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x}{(2 \sin x - \sqrt{3}) \cos x} \geq 0$

Grafici

Per ciascuna delle seguenti funzioni traccia il grafico e determina massimo e minimo (quando esistono)

1) $y = \frac{\tan^2 x - 3 \tan x + 2}{\tan x - 2}$

2) $y = |2 \sin^2 x - 3|$

3) $y = \sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) + 1$

Problemi

1) Dato il trapezio $ABCD$ tale che: $\hat{A} = \hat{D} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 56a$, $\overline{BC} = 50a$ e $\cos \hat{ABC} = \frac{7}{25}$ determina le misure dei restanti lati.

2) Sui lati OX e OY dell'angolo $X\hat{O}Y = \frac{2}{3}\pi$ considera rispettivamente i punti A e B tali che $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = 2a$. Sia P un punto interno all'angolo tale che $\overline{OP} = 2a$; posto $\hat{AOP} = x$, determina l'espressione di $f(x) = \overline{AP}^2 + 2\overline{AM}^2 + \overline{PB}^2$. Qual è il valore minimo di tale funzione, tenendo conto delle limitazioni del problema?

3) Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, conduci le corde AC e BD tali che: $\hat{BAC} = 2\hat{DBA} = 2x$ e indica con M il loro punto di intersezione. Determina l'espressione di $f(x) = \frac{\overline{AB}}{2\overline{AM}} + 3\frac{\overline{DB}}{\overline{MB}}$ e tracciarne il grafico.

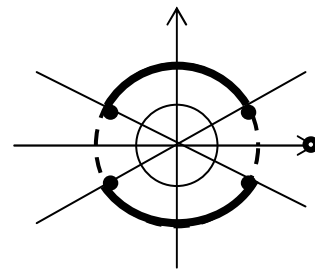
4) Sia M il punto medio del segmento $\overline{AB} = 2a$. In uno dei due semipiani da AB , si fissi un punto P tale che $\cos(\hat{APM}) = \frac{3}{5}$. Posto $\hat{PAM} = x$, determina per quali valori $5\overline{AP} + \overline{PM} = 5a$.

Disequazione 1 $2 \left| \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right| - 1 < 0$

La disequazione è equivalente a: $-\frac{1}{2} < \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{1}{2}$, quindi guardando sulla

circonferenza goniometrica: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{7\pi}{12} + k\pi$$



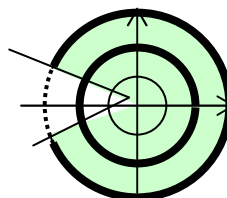
Disequazione 2 $\frac{2 - \sqrt{3} \sin x \cos x}{2 \cos x + \sqrt{3}} \geq 0$

Si risolve studiando il segno di numeratore e denominatore:

$$\begin{cases} \sin x \cos x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ricordando la formula di duplicazione del seno:

$$\begin{cases} \sin(2x) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$



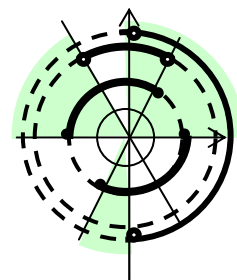
La soluzione è: $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Disequazione 3 $\frac{\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x}{(2 \sin x - \sqrt{3}) \cos x} \geq 0$

Si risolve studiando il segno del numeratore e dei fattori a denominatore:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x \geq 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

, il numeratore è una disequazione omogenea, i fattori a



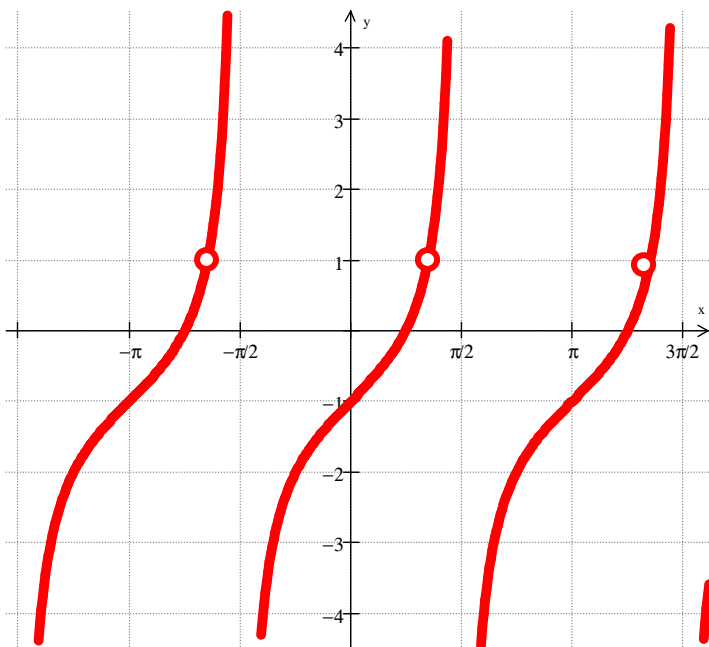
denominatore sono elementari: $\begin{cases} \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x \geq 0 \Rightarrow \tan x \leq 0 \vee \tan x \geq \sqrt{3} \\ \cos x > 0 \\ \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

La soluzione è:

$$\Rightarrow 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \vee \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Grafico 1 $y = \frac{\tan^2 x - 3 \tan x + 2}{\tan x - 2}$ scomponendo il numeratore si ha: $y = \frac{(\tan x - 2)(\tan x - 1)}{\tan x - 2} = \tan x - 1$

con la condizione $\tan x \neq 2 \Rightarrow x \neq \arctan 2 + k\pi$



Il grafico si ottiene con i seguenti passaggi:

- disegno il grafico di $\tan x$,
- sposto l'asse orizzontale in alto di 1
- ricordo le limitazioni

non c'è né massimo né minimo, perché la funzione è illimitata

Grafico 2 $y = |2\sin^2 x - 3|$ usando la formula di duplicazione del coseno si può abbassare di grado

$$y = \left| 2 \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2} - 3 \right| = |-2 - \cos(2x)| = |\cos(2x) + 2|$$

considerando che l'argomento del modulo è positivo per ogni valore di x so può anche evitare di mettere il modulo: $y = \cos(2x) + 2$

Il grafico si ottiene con i seguenti passaggi:

- disegno il grafico di $\cos x$,
 - contraggo orizzontalmente di 2
 - abbasso l'asse orizzontale di 2
- minimo: 1; massimo: 3

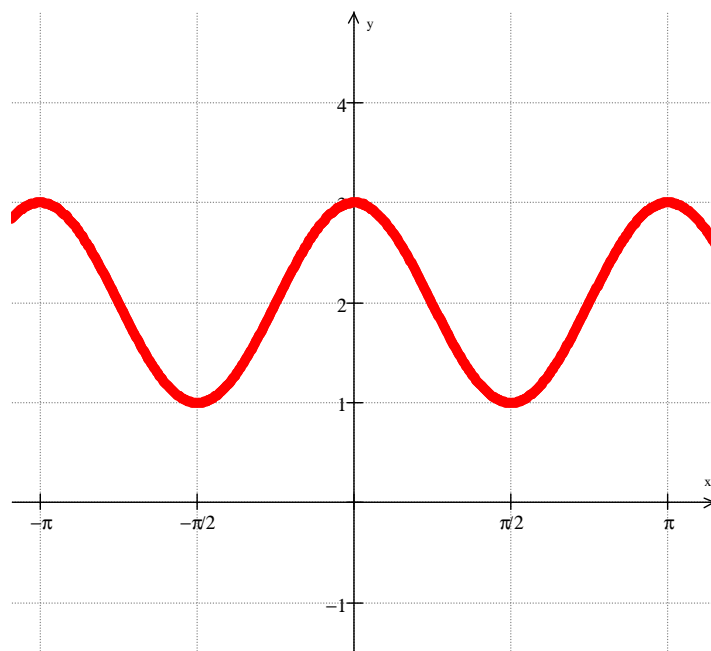


Grafico 3 $y = \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) + 1$ usando il metodo dell'angolo aggiunto è possibile riscrivere il testo come:

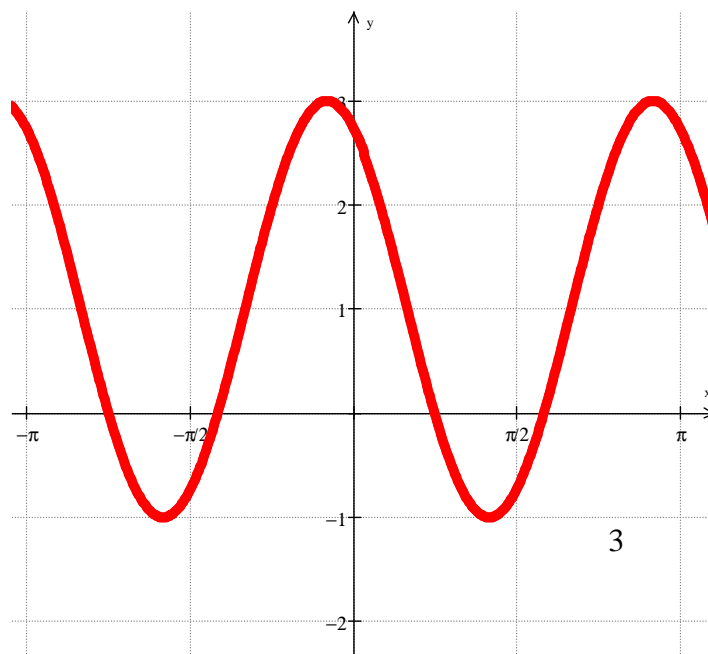
$$y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] + 1$$

Il grafico si ottiene con i seguenti passaggi:

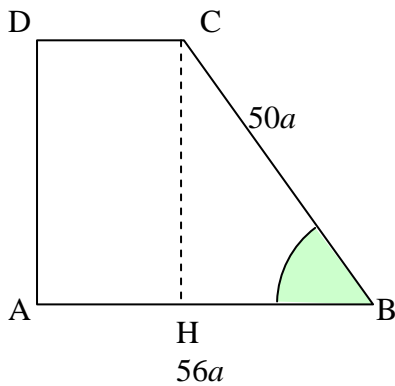
- disegno il grafico di $\cos x$,
- contraggo orizzontalmente di 2
- dilato verticalmente di 2
- sposto l'asse verticale a destra di $\frac{\pi}{12}$
- abbasso l'asse orizzontale di 1

minimo: -1; massimo: 3

Verifica di trigonometria 12 febbraio 4G



Problema 1 Dato il trapezio ABCD tale che: $\hat{A} = \hat{D} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 56a$, $\overline{BC} = 50a$ e $\cos \hat{A}BC = \frac{7}{25}$ determina le misure dei restanti lati.



Con la calcolatrice si vede che $\hat{A}BC \approx 73^\circ,7$

Dalle relazioni tra funzioni goniometriche:

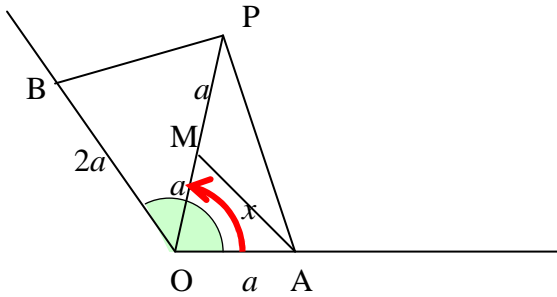
$$\sin \hat{A}BC = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}BC} = \frac{24}{25}$$

$$\overline{BH} = BC \cos \hat{A}BC = 50a \cdot \frac{7}{25} = 14a \text{ (BHC rettangolo)}$$

$$\text{quindi } \overline{CD} = \overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB} = 42a$$

$$\overline{AD} = \overline{CH} = \overline{BC} \sin \hat{A}BC = 50a \cdot \frac{24}{25} = 48a \text{ (BHC rettangolo)}$$

Problema 2 Sui lati OX e OY dell'angolo $X\hat{O}Y = \frac{2}{3}\pi$ considera rispettivamente i punti A e B tali che $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = 2a$. Sia P un punto interno all'angolo tale che $\overline{OP} = 2a$; posto $\hat{A}OP = x$, determina l'espressione di $f(x) = \overline{AP}^2 + 2\overline{AM}^2 + \overline{PB}^2$. Qual è il valore minimo di tale funzione, tenendo conto delle limitazioni del problema?



Posto $\hat{A}OP = x$ si ha: $0 < x < \frac{2}{3}\pi$

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 - 2\overline{AO} \cdot \overline{PO} \cos x = \\ &= a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos x = 5a^2 - 4a^2 \cos x \end{aligned} \quad \text{(OAP)}$$

$$\overline{AM}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{MO} \cdot \overline{AO} \cos x = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos x = 2a^2 - 2a^2 \cos x \quad \text{(OAM)}$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{BO} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) =$$

$$= 4a^2 + 4a^2 - 8a^2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = 8a^2 - 8a^2\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 8a^2 + 4a^2 \cos x - 4a^2 \sqrt{3} \sin x$$

Sostituendo nella funzione si ha:

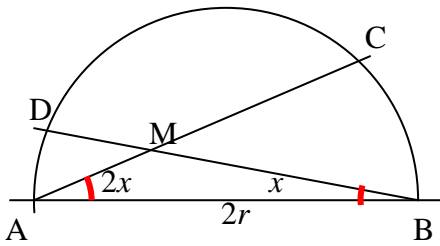
$$f(x) = \overline{AP}^2 + 2\overline{AM}^2 + \overline{PB}^2 = 17a^2 - 4a^2 \cos x - 4a^2 \sqrt{3} \sin x \text{ riscrivendola con il metodo dell'angolo}$$

aggiunto si ottiene: $f(x) = 17a^2 + 8a^2 \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$. Il valore minimo si può determinare anche senza

tracciare il grafico, infatti è $9a^2$ e si ha quando $\cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = -1$ cioè $x = \frac{\pi}{3}$ (tenendo conto delle limitazioni).

Problema 3 Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, conduci le corde AC e BD tali che: $\hat{B}AC = 2\hat{D}BA = 2x$

e indica con M il loro punto di intersezione. Determina l'espressione di $f(x) = \frac{\overline{AB}}{2\overline{AM}} + 3\frac{\overline{DB}}{\overline{MB}}$ e tracciarne il grafico.



Posto $\hat{D}BA = x$, poiché le due corde si devono incontrare la condizione limite si ha quando il punto M è sulla semicirconferenza, quindi $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\pi - 3x)} \sin x = \frac{2r \sin x}{\sin(3x)} \quad (\text{ABM})$$

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\pi - 3x)} \sin 2x = \frac{2r \sin 2x}{\sin(3x)} \quad (\text{ABM})$$

$$\overline{DB} = \overline{AB} \cos x = 2r \cos x \quad (\text{ADB rettangolo})$$

Sostituendo nella funzione si ha:

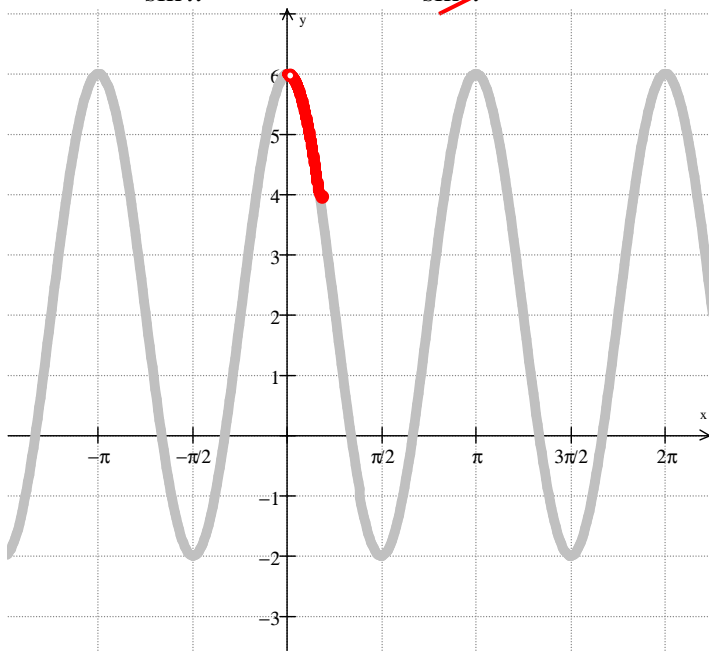
$$f(x) = \frac{\overline{AB}}{2\overline{AM}} + 3\frac{\overline{DB}}{\overline{MB}} = \frac{\sin(3x)}{2 \sin x} + 3 \frac{\cos x \sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(3x)}{2 \sin x} + 3 \frac{\cos x \sin(3x)}{2 \sin x \cos x} = 2 \frac{\sin(3x)}{\sin x} \quad (\text{nessuna C.E. per le limitazioni})$$

limitazioni)

Sostituendo e ricordando le formule di duplicazione:

$$\sin(3x) = \sin(x + 2x) = \sin x \cos(2x) + \sin(2x) \cos x = \sin x \cos(2x) + 2 \sin x \cos^2 x = \sin x (\cos(2x) + 2 \cos^2 x)$$

$$f(x) = 2 \frac{\sin(3x)}{\sin x} = 2 \frac{\sin x (\cos(2x) + 1 + \cos(2x))}{\sin x} \quad \text{cioè} \quad f(x) = 4 \cos(2x) + 2 \quad (\text{nessuna C.E. per le limitazioni})$$



Il grafico si ottiene con i seguenti passaggi:

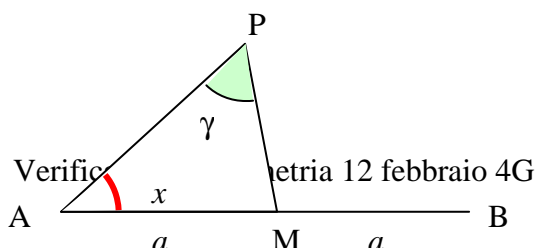
- disegno il grafico di $\cos x$,
- contraggo orizzontalmente di 2
- dilato verticalmente di 4
- abbasso l'asse orizzontale di 2

Problema 4

Sia M il punto medio del segmento $\overline{AB} = 2a$. In uno dei due semipiani da AB , si fissi un punto P tale che $\cos(\hat{A}PM) = \frac{3}{5}$. Posto $\hat{P}AM = x$, determina per quali valori $5\overline{AP} + \overline{PM} = 5a$.

Utilizzando la calcolatrice $\hat{A}PM = \gamma \approx 53^\circ$ e dalle relazioni tra le funzioni goniometriche: $\sin(\hat{A}PM) = \frac{4}{5}$

Posto $\hat{P}AM = x$ si ha: $0 \leq x \leq \pi - \gamma$



$$\overline{AP} = \frac{\overline{AM}}{\sin \gamma} \sin(\pi - (x + \gamma)) = \frac{5a}{4} \sin(x + \gamma) \quad (\text{APM})$$

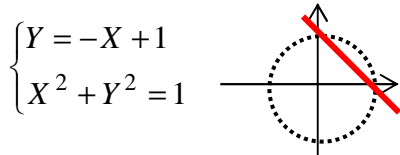
$$\overline{MP} = \frac{\overline{AM}}{\sin \gamma} \sin x = \frac{5a}{4} \sin x \quad (\text{APM})$$

Sostituendo nella relazione si ha:

$$5\overline{AP} + \overline{PM} = 5a \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{4}a \sin(x + \gamma) + \frac{5}{4}a \sin x = 5a \quad \text{utilizzando la formula di addizione del seno:}$$

$$\frac{5}{4} \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) + \frac{1}{4} \sin x = 1; \quad \sin x + \cos x = 1 \quad \text{si ottiene così un'equazione lineare che si può risolvere}$$

con il metodo della circonferenza:



di conseguenza si hanno le soluzioni: $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, accettabili sono solo

$$x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$$