Nome…………………………Cognome……………… 11 Novembre 2008 classe 5D

VERIFICA di matematica

PROBLEMA

Considera la funzione $y=\sqrt{x^2+2x-3}-x$ determina:

a) dominio
b) segno e intersezione con gli assi
c) limiti agli estremi del dominio ed equazioni di eventuali asintoti

Traccia il grafico probabile.

Deduci dal grafico tracciato i grafici di: $y=x-\sqrt{x^2+2x-3}$; e $y=2\sqrt{x^2+2x-3}-2x$
$y=\left|\sqrt{x^2+2x-3}-x\right|$

QUESITI: svolgi 5 dei seguenti quesiti

1) Dal vertice A di un triangolo ABC equilatero di lato *l* si conduca una semiretta che intersechi il triangolo e tale che la somma dei quadrati delle distanze dai vertici B e C sia $1/2l^2$.

2) Dai la definizione di asintoto obliquo ed indica quali condizioni devono essere verificate affinché una funzione $y=f(x)$ ammetta asintoto obliquo. Data $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+5}{1-x^2}$ determina l'equazione degli eventuali asintoti obliqui.

3) Dai la definizione di $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Calcola $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\cos(3x)-1}$

4) Discuti al variare del parametro *k* il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^k}$

5) Indica quali sono le forme di indecisione che coinvolgono le potenze e calcola i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^2\right)^{\frac{2}{\ln 3x}}$

6) Dimostra il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ e calcola $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x}-e^2}{\sin(\pi x)}$

SOLUZIONI

PROBLEMA

Considera la funzione $y=\sqrt{x^2+2x-3}-x$ determina:

a) dominio

b) segno e intersezione con gli assi

c) limiti agli estremi del dominio ed equazioni di eventuali asintoti

Traccia il grafico probabile.

a) Poiché nell'espressione di f(x) c'è una radice quadrata, si dovrà mettere la condizione di esistenza sull'argomento che non può essere negativo, cioè:

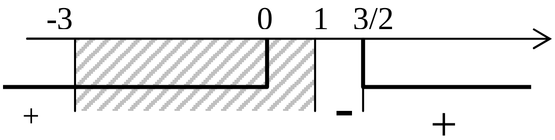
C.E. $x^2+2x-3\geq 0 \Rightarrow x\leq -3 \vee x\geq 1$, quindi il dominio sarà $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$

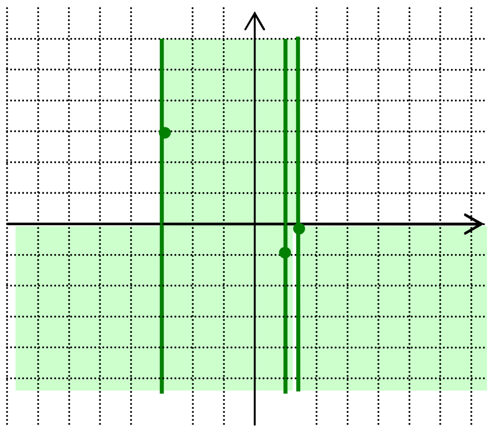
b) poiché $0\notin D$ non ha senso calcolare l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Per lo studio del segno e l'intersezione con l'asse delle ascisse si risolve la disequazione irrazionale: $\sqrt{x^2+2x-3}-x\geq 0$. Si isola la radice $\sqrt{x^2+2x-3}\geq x$, posta già la C.E: si avrà:

$$\begin{cases} x\geq 0 \quad (\textit{condizione di concordanza} \\ x^2+2x-3\geq x^2 \end{cases} \vee\ x<0$$

$$\text{quindi} \begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \vee\ x<0$$





c) Poiché $-3;1\in D$ al posto di calcolare il limite è possibile determinare semplicemente $f(-3)=3$ e $f(1)=-1$, rimangono da calcolare i limiti a $\pm\infty$.

- Limite a $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=+\infty$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=+\infty$ è possibile avere un asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$ con

$m=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $q=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Svolgiamo i calcoli:

$m=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{x}=\left[\dfrac{+\infty}{-\infty}\right]F.I.$ per risolverla utilizzo l'asintotico, ricordando in particolare che

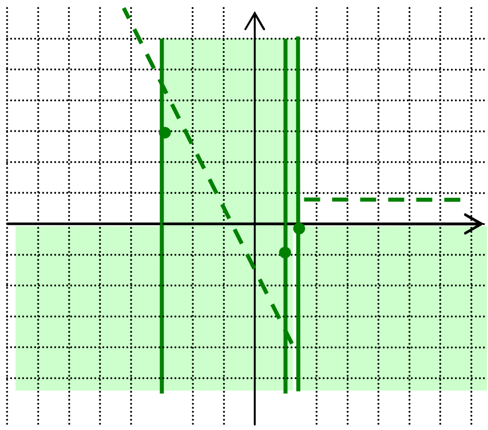
$$\sqrt{x^2+2x-3}\underset{x\to-\infty}{\sim}|x|=-x$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)}{x} \underset{x\to-\infty}{\sim} .\frac{-2x}{x}=-2\text{, quindi } m=-2\,.$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)=[+\infty-\infty]F.I.$$

In questo caso non è possibile utilizzare l’asintotico (verrebbe asintotico a 0), quindi per risolvere la forma d’indecisione razionalizzo.

$$\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{\sqrt{x^2+2x-3}-x}=\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x-3}-x}=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}-x}\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{2x}{-2x}=-1$$



Quindi l’equazione dell’asintoto obliquo è: $y=-2x-1$

- Limite a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=[+\infty-\infty]F.I.$$

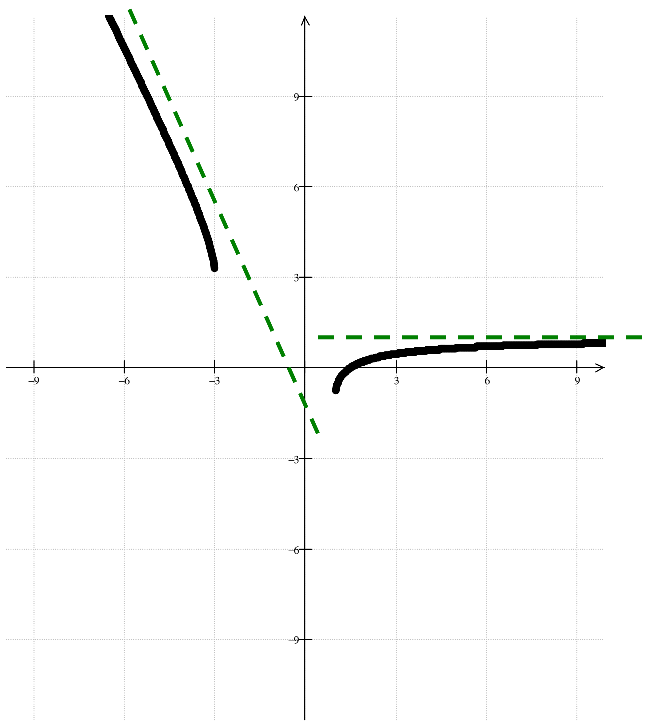
E’ possibile risolvere questa F.I. razionalizzando

$$\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x-3}+x}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}=\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}=$$

$$=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2x}{2x}=1$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)=1$ y=1 è l’equazione dell’asintoto orizzontale

Tenendo conto di tutte le informazioni è possibile tracciare il grafico probabile.



Deduci dal grafico tracciato i grafici di:

a) $y = x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;

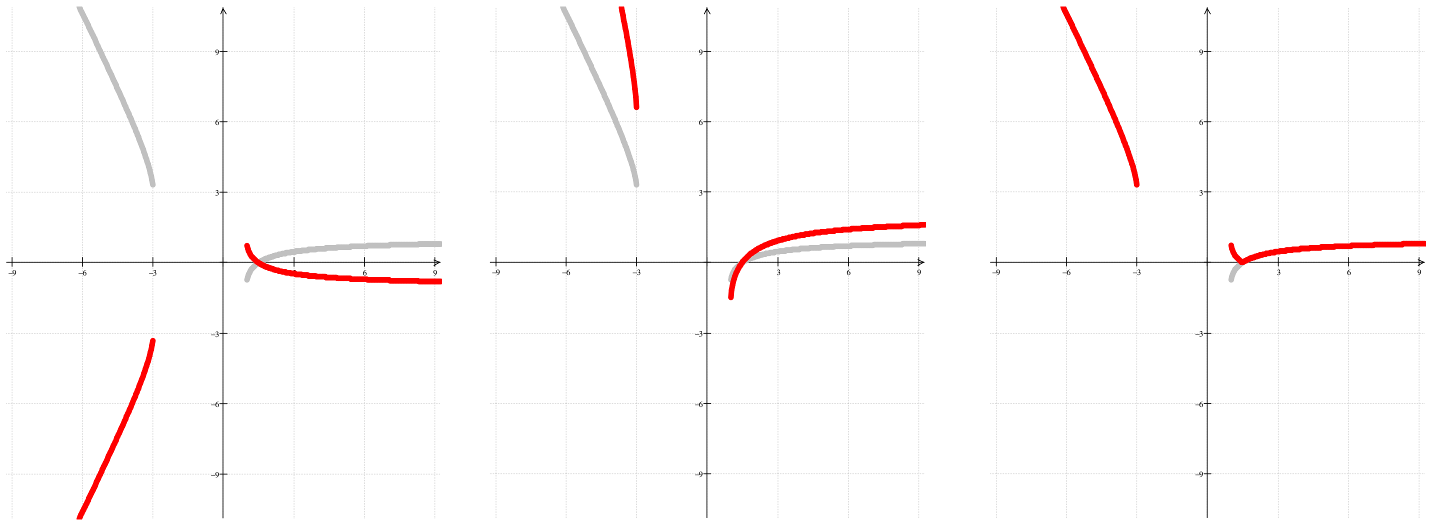
detto γ il grafico della funzione studiata, è sufficiente farne il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

b) $y = 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 2x$

detto γ il grafico della funzione studiata, è sufficiente farne la dilatazione verticale di un fattore 2.

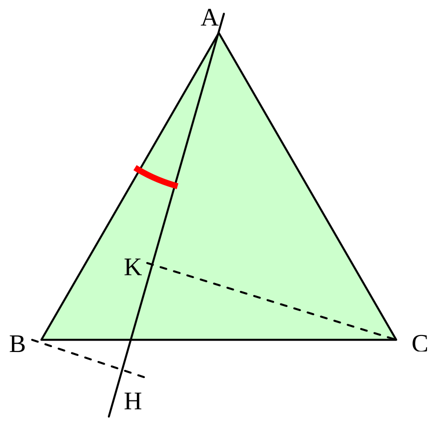
c) $y = \left|\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x\right|$

detto γ il grafico della funzione studiata, è sufficiente ribaltare le parti negative



QUESITO 1

Dal vertice A di un triangolo ABC equilatero di lato l si conduca una semiretta che intersechi il triangolo e tale che la somma dei quadrati delle distanze dai vertici B e C sia $1/2l^2$.



La relazione fornita dal problema è: $\overline{BH}^2 + \overline{CK}^2 = \frac{1}{2}l^2$

Pongo $B\widehat{A}H = x$ con limitazioni $0 \le x \le 60°$

Considero il triangolo rettangolo BHA di ipotenusa $\overline{AB} = l$

$\overline{BH} = l \sin x$ (per il teorema sui triangoli rettangoli);

considero il triangolo rettangolo CKA di ipotenusa $\overline{AC} = l$

$\overline{CK} = l \sin(60° - x)$ (per il teorema sui triangoli rettangoli). Sostituendo nella relazione del problema si ha: $l^2 \sin^2 x + l^2 \sin^2(60° - x) = \frac{1}{2}l^2$ Utilizzando le formule di sottrazione del seno si ha:

$\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)^2 = \frac{1}{2}$, sviluppando il quadrato $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \sin x = \frac{1}{2}$ si ottiene un'equazione riconducibile ad una omogenea di 2° grado $3\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \sin x = 0$, dividendo ambo i membri per $\cos^2 x$ (con $\cos x \neq 0$) si ottiene: $3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$, quindi $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cioè, tenendo conto delle limitazioni, $x = 30°$.

QUESITO 2

Dai la definizione di asintoto obliquo ed indica quali condizioni devono essere verificate affinché una funzione $y = f(x)$ ammetta asintoto obliquo. Data $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{1 - x^2}$ determina l'equazione degli eventuali asintoti obliqui.

La retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx+q)] = 0$; Affinché ciò avvenga devono essere verificate le seguenti condizioni:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Osserviamo che $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{1 - x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2x^3}{-x^2} = -2x$; di conseguenza sono verificate le prime due condizioni ed in particolare $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x} = -2$.

Determiniamo q calcolando l'ultimo limite:

$$q = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{1 - x^2} + 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 5 + 2x - 2x^3}{1 - x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{-x^2} = 3$$

Quindi l'equazione dell'asintoto è: $y = -2x + 3$

QUESITO 3

Dai la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos(3x) - 1}$

Definizione $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D \ \ f(x) \in I_\varepsilon(l)$

Calcolo del limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos(3x) - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] F.I.$

Osserviamo che non è possibile utilizzare l'asintotico a numeratore perché otterremmo 0; applichiamo quindi prima le proprietà dei logaritmi, poi l'asintotico derivante dai limiti notevoli:

$$\frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos(3x) - 1} = \frac{\ln(1 - x^2)}{\cos(3x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{-\frac{1}{2}(3x)^2} = \frac{2}{9}$$

QUESITO 4

Discuti al variare del parametro k il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)\sin^2 x}{x^k}$

Osserviamo che il numeratore può essere scritto in una forma più comoda, utilizzando gli asintotici derivanti dai limiti notevoli: $\dfrac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^k} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2}{x^k} = \dfrac{1}{2}x^{4-k}$, di conseguenza il valore del limite dipenderà da quello di k: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x^{4-k} = \begin{cases} 0 & se \;\; k<4 \\ \dfrac{1}{2} & se \;\; k=4 \\ \infty & se \;\; k>4 \end{cases}$

QUESITO 5

Indica quali sono le forme di indecisione che coinvolgono le potenze e calcola i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^2\right)^{\frac{2}{\ln 3x}}$

Le forme di indecisione legate alle potenze sono 1^∞; 0^0; ∞^0

a) Nel calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ si ha una forma di indecisione del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ alla base e all'esponente, tali forme di indecisione sono facilmente risolubili. Utilizzando gli asintotici si ottiene che la base tende a $\dfrac{1}{2}$, mentre l'esponente a $+\infty$. Si ha così $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0^+$

b) Nel calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x}$ si ha una forma di indecisione del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ alla base, tale forma di indecisione è facilmente risolubile, infatti utilizzando gli asintotici si ottiene che la base tende a 1. Si ha così $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x} = \left[1^{+\infty}\right] F.I..$

Riscriviamo il testo nel modo seguente:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x} = e^{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{2x}} = e^{2x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}\right)} = e^{2x\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^2+x}-1\right)} = e^{2x\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2+x}\right)}$$

Ora è possibile utilizzare l'asintotico derivante dal limite notevole:

$$e^{2x\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2+x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x\cdot\frac{1-x}{x^2+x}} = e^{\frac{2x-2x^2}{x^2+x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\frac{-2x^2}{x^2}} = e^{-2}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^2\right)^{\frac{2}{\ln 3x}} = \left[0^0\right] F.I.$

Riscriviamo il testo nel modo seguente:

$$\left(5x^2\right)^{\frac{2}{\ln 3x}} = e^{\ln\left(5x^2\right)^{\frac{2}{\ln 3x}}} = e^{\frac{2}{\ln 3x}\cdot\ln\left(5x^2\right)} = e^{\frac{2\ln 5x^2}{\ln 3x}\cdot} = e^{\frac{2(\ln 5+2\ln x)}{\ln 3+\ln x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\frac{4\ln x}{\ln x}} = e^4$$

QUESITO 6

Dimostra il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ e calcola $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{\sin(\pi x)}$

Per la dimostrazione vedi la teoria

Calcolo del limite: $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{\sin(\pi x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$ $F.I.$ Per poter utilizzare i limiti notevoli è necessario riscrivere la funzione

$$\frac{e^{2x}-e^2}{\sin(\pi x)}=\frac{e^2(e^{2x-2}-1)}{\sin(\pi-\pi x)}\underset{x\to 1}{\sim}\frac{e^2(2x-2)}{\pi-\pi x}=\frac{2e^2\cancel{(x-1)}}{-\pi\cancel{(x-1)}}=-\frac{2e^2}{\pi}$$