Compiti estivi 3AL

La Matematica è come una lingua: se smetti di parlarla troppo a lungo, poi te la dimentichi.

A questi compiti, che dovrete fare e che verranno comunicati al docente che mi succederà, allego anche una breve dispensa su come risolvere le disequazioni di secondo grado graficamente, che vi invito a leggere perché molti di voi usano il metodo mnemonico del libro che secondo me dimenticherete a breve.

Infine vi ricordo che **potete scrivermi** anche in estate **per correzioni**, dubbi, esercizi mirati e consigli.

Compiti per tutti

- **Equazioni di secondo grado e problemi di secondo grado**:
  da pag. 161, es. 9, 13, 15, 20, 24, 25, 32, 42, 43, 48, 79, 81, 87, 96, 100. Poi, da pag. 134, es. 574, 583, 584, 585
- **Disequazioni non lineari**: (ricordate di fare i pallini appropriati nello schema dei segni!)
  Da pag. 280, es. 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
- **Piano cartesiano**: qui vi allenerete sulle cose che abbiamo fatto per parabole e circonferenze sull'ellisse, che funziona allo stesso modo
  da pag. 418, es 95, 96, 97, 112, 113, 116, 138, 139, 140

Compiti per chi non ha ottenuto la sufficienza

Dal momento che spesso ciò è avvenuto per lacune pregresse, in **aggiunta** a quelli degli altri, suggerisco, in base a dove avete riscontrato difficoltà, di fare esercizi su:

- **Scomposizioni**: se avete difficoltà in raccoglimenti (sono brevi, fateli!)
  da pag. 25, es. 207, 208, 210, 216, 228, 234, 237, 240, 243, 253, 262, 489, 494, 497,
- **Frazioni algebriche**: sono esercizi molto brevi, ma utili, in sostanza, se vedete che avete difficoltà nei conti nelle (dis)equazioni fratte
  studiare da pag. 44 a 46. Esercizi da pag. 52, n° 17, 35, 47, 48, 63, 65, 66, 67, 73, 79, 80, 93, 98, 99, 111, 112, 113, 117, 123, 125, 126, 153, 159

Disequazioni di secondo grado con la parabola

Una disequazione di secondo grado si può sempre mettere in una forma del tipo

$$ax^2 + bx + c \lesseqqgtr 0$$

cioè, ad esempio

$$x^2 + 2 > 0$$

$$x^2 - 4x + 7 < 0$$

$$x^2 \leq 0$$

$$-2x^2 + x + 1 > 0$$

Lo scopo del gioco è dunque capire, al variare di x, quando un'espressione complicata come $x^2 - 4x + 7$ è positiva o negativa.

Diamole dunque un nome

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

In questo modo chiedersi ad esempio se

$$x^2 - 4x + 7 < 0$$

è la stessa cosa che chiedersi, al variare di x, quando

$$y < 0.$$

Dato che l'equazione

$$y = x^2 - 4x + 7$$

rappresenta una parabola, abbiamo tramutato il problema nel capire se il grafico sta sopra all'asse x ($y > 0$) o sotto ($y < 0$). Per non complicare la situazione, facciamo sempre in modo che questa parabola abbia la concavità verso l'alto, quindi

preliminarmente moltiplichiamo per -1 se il coefficiente di x^2 è negativo.

Ora ci basta capire che posizione ha la parabola rispetto all'asse x. Per farlo, ci basta contare **quante** e **quali** intersezioni ha con l'asse x, cioè risolvere l'equazione

$$x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Se sono due l'asse x è secante, se è una è tangente, se non ce ne sono è esterno. **Non bisogna confondere le soluzioni dell'equazione con quelle della disequazione**, sono due cose molto diverse. Esaminiamo i 3 casi.

Parabola che taglia l'asse x (2 soluzioni dell'equazione)

Questo accade in casi come ad esempio

1. $x^2 - 5 > 0$: a questa è associata l'equazione

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{5} \text{ (2 soluzioni)}$$

2. $x^2 + 7x + 2 < 0$: a questa è associata l'equazione

$$x^2 + 7x + 2 = 0$$

che ha $\Delta = 49 - 8 = 41 > 0$ e dunque 2 soluzioni, $x_\pm = \frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}$

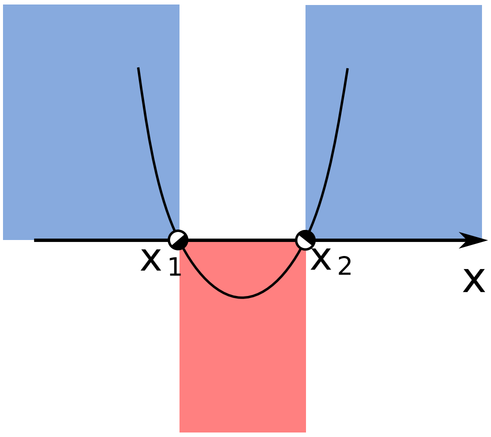
3. $x^2 + 3x + 2 \leq 0$: a questa è associata l'equazione

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0$$

$$x = \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(2 soluzioni)}$$

Non importa come risolviamo l'equazione, se ha 2 soluzioni il grafico sarà sempre del tipo



Come si vede la parabola sta sopra l'asse x (e l'espressione è richiesta > 0) a sinistra della soluzione più piccola o a destra di quella più grande, cioè[1]

$$x < x_1 \vee x > x_2$$

Viceversa è sotto a zero (cioè l'espressione è richiesta < 0) se ci troviamo tra le due soluzioni

$$x_1 < x < x_2.$$

Nello schema è bene mettere pallini sulle intersezioni con l'asse per ricordarci dove l'espressione è esattamente zero, mettendoli bianchi se abbiamo una disequazione con $<$ o $>$ e neri se c'è $\leq$ o $\geq$.

In questo modo selezioneremo l'una o l'altra alternativa se la disequazione è con maggiore o minore rispettivamente e metteremo anche gli uguali se i pallini sono neri.

Dunque le soluzioni delle disequazioni precedenti sono:

1. $x > \sqrt{5} \vee x < -\sqrt{5}$ (pallini bianchi)
2. $\frac{-7-\sqrt{41}}{2} < x < \frac{-7+\sqrt{41}}{2}$ (pallini bianchi)
3. $-2 \leq x \leq -1$ (pallini neri)

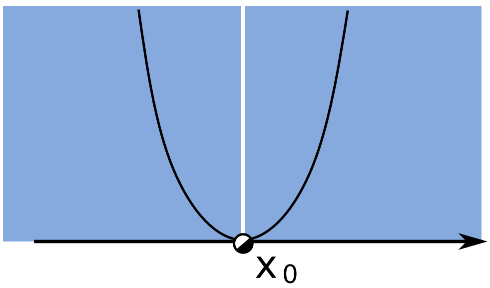
[1]Mettere qui $\vee$ non è un dettaglio qualsiasi. È di **capitale** importanza non confonderlo con $\wedge$: $x < 1 \wedge x > 2$ è impossibile, perché nessun numeri può essere contemporaneamente maggiore di 2 e più piccolo di 1. A tal proposito si osservi che $1 < x < 2$ è la stessa cosa che scrivere $x > 1 \wedge x < 2$, perché x deve sia più piccolo di 2 sia più grande di 1.

Parabola tangente all'asse x (1 soluzione dell'equazione)

Questo accade in casi come ad esempio

1. $x^2 > 0$: a questa è associata l'equazione
$$x^2 = 0$$
$$x = 0 \text{ (1 soluzione)}$$
2. $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$: a questa è associata l'equazione
$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$
che ha $\Delta = 144 - 144 = 0$ e dunque 1 soluzione, $x_0 = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}$
3. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$: a questa è associata l'equazione
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1 \text{ (1 soluzione)}$$
4. $(x-2)^2 < 0$: a questa è associata l'equazione
$$(x-2)^2 = 0$$
$$x = 2 \text{ (1 soluzione)}$$

Stavolta la parabola è tangente e dunque abbiamo un grafico del tipo



e la parabola è quasi tutta > 0 **tranne** che nel punto di intersezione, dove si annulla (la soluzione dell'equazione). Questo lo possiamo prendere **solo** se abbiamo il $\leq$ o il $\geq$ nella disequazione (pallino nero).

Negli esempi, allora avremo

1. $\forall x \neq 0$ (pallino bianco sulla soluzione $x_0 = 0$)
2. $\forall x$ (qui avremmo il pallino nero e possiamo prendere tutto)
3. $x = -\frac{2}{3}$ (qui non abbiamo nessuna x che soddisfa $x^2 + 2x + 1 < 0$ ma una che soddisfa $x^2 + 2x + 1 = 0$, quindi, dato che c'era il minore o uguale, prendiamo lei che soddisfa almeno l'uguale. Alternativamente, essendoci il pallino nero, esso doveva stare nella soluzione.)
4. $\nexists x \in \mathbb{R}$ (nessuna x, perché la parabola non è mai < 0)

Parabola sopra all'asse x (0 soluzioni dell'equazione)

Esempi tipici sono

1. $x^2 + 3 > 0$: a questa è associata l'equazione

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -3$$

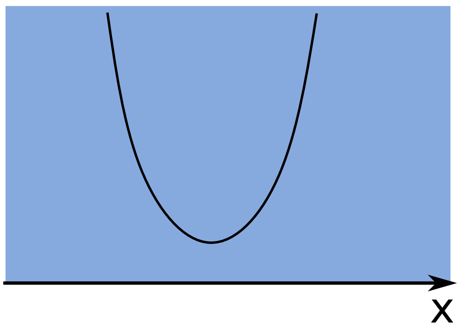
   che non ha soluzioni (un quadrato è sempre positivo)

2. $x^2 + x + 4 < 0$: a questa è associata l'equazione

$$x^2 + x + 4 = 0$$

   che ha $\Delta = 1 - 16 < 0$ e dunque non ha soluzioni

Stavolta la parabola è tangente e dunque abbiamo un grafico del tipo



e la parabola è **tutta** > 0 (quindi in particolare è tutta ≥ 0). Non essendoci pallini (intersezioni con l'asse) non c'è differenza tra $>$ o $\geq$ e $<$ o $\leq$.

Nei nostri esempi avremo quindi:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ (qui si capiva anche dal fatto che la somma di numeri positivi è sempre positiva)

2. $\nexists x \in \mathbb{R}$