Anno Scolastico 2017-18

Classe 3^AS

PROGRAMMA DI MATEMATICA

Docente: prof.ssa Elena Nobili

Libro di testo in adozione:

M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone “3 Matematica.blu 2.0” vol. 3 - Zanichelli

Complementi di algebra

- Ripasso disequazioni razionali fratte e contenenti espressioni in valore assoluto.
- Disequazioni irrazionali

Introduzione alla geometria analitica

- Concetto di funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzione inversa e composizione di funzioni.
- Le successioni. Il principio di induzione. La progressione aritmetica.
- Distanza tra due punti, punto medio, baricentro di un triangolo, luoghi geometrici.

La retta

- Equazione di una retta generica del piano; parallelismo e perpendicolarità, intersezione di due rette; distanza di un punto da una retta.
- Interpretazione grafica di disequazioni lineari.
- Fasci di rette.

Le coniche

- La circonferenza: equazione, retta tangente, fasci di circonferenze.
- Parabola con asse parallelo ad uno degli assi cartesiani, retta tangente, fasci di parabole.
- Ellisse ed iperbole con i fuochi sugli assi cartesiani e centro nell’origine del sistema di riferimento, retta tangente e formula di sdoppiamento, eccentricità.
- Ellisse ed iperbole traslate; iperbole equilatera; funzione omografica.
- Grafici di funzioni irrazionali o deducibili da rette e coniche.
- Interpretazione grafica di disequazioni irrazionali e contenenti valori assoluti.

Funzione esponenziale e funzione logaritmica

- Funzioni, equazioni e disequazioni esponenziali.
- Definizione di logaritmo e funzione logaritmica.
- Proprietà dei logaritmi.
- Equazioni e disequazioni logaritmiche.

Numeri complessi

- Calcolo con i numeri complessi in forma algebrica, rappresentazione nel piano di Gauss.
- Forma trigonometrica e forma esponenziale di un numero complesso; operazioni con i numeri complessi nella forma esponenziale; le radici n-esime di un numero complesso.

Funzioni reali di variabile reale

- Concetto di funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzione inversa.
- Composizione di funzioni.
- Grafici delle funzioni elementari, caratteristiche del grafico di una funzione, simmetrie.

Successioni e progressioni

- Le progressioni aritmetiche e geometriche.
- Principio di induzione.
- approfondimento: il concetto di infinito.

Statistica univariata

- Dati statistici.
- Indici di posizione e variabilità.

COMPITI PER LE VACANZE ESTIVE

Funzioni

Problema

a. Classifica la funzione $y=\frac{1}{2}-\sqrt{-x^2+1}$ e individuane il dominio. Calcola poi il valore di $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
.

b. Determina il segno della funzione, stabilendo eventualmente i suoi zeri.

c. Stabilisci se la funzione è pari, dispari o né l'una né l'altra. Traccia per punti il grafico della funzione. Traccia il grafico della funzione $y=\frac{1}{2}-\sqrt{\left|-x^2+1\right|}$.

d. Stabilisci dal grafico gli intervalli in cui la funzione data è eventualmente costante, crescente, decrescente, in senso stretto o lato.

e. Dimostra che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[0,1]$.

f. Stabilisci se la funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva o come può essere resa tale restringendo il codominio.

Quesiti

1. Traccia per punti il grafico della funzione $f(x)=x^3+\frac{1}{8}$. La funzione è invertibile? In caso affermativo, determina l'espressione della funzione inversa e tracciane il grafico. Traccia poi il grafico della funzione $f(x)=-x^3-\frac{1}{8}$. Quale relazione intercorre tra i due grafici? Il grafico di una funzione $y=f(x)$ può essere simmetrico rispetto all'asse *x*? La funzione data è monotòna? Motiva in modo esauriente le risposte.

2. Date le funzioni $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ e $g(x)=\sqrt{x-\frac{1}{2}}$, determina l'espressione analitica delle seguenti funzioni e il loro dominio:

$f(x)+g(x)$

$f(x)-g(x)$

$f(x)\cdot g(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)}$

3. Date le funzioni $f(x)=\sqrt{x+3}$ e $g(x)=\sqrt{x-\frac{3}{2}}$, determina l'espressione analitica della funzione $f(x)\cdot g(x)$.

Essa è uguale alla funzione $h(x)=\sqrt{(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$? Motiva adeguatamente la risposta.

4. Date le funzioni $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ e $h(x)=x-2$, determina l'espressione analitica di $g\circ f$; $f\circ g$; $g\circ h$; $h\circ g$ specificando il dominio di tali funzioni. Mostra che la composizione di funzioni non gode della proprietà commutativa mentre gode di quella associativa.

5. Data la funzione $h(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ con $x\neq 3$, trova almeno tre coppie di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $h(x)=(g\circ f)(x)$.

Successioni e progressioni aritmetiche e geometriche

Problema

Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiese al re cui fece dono del gioco una ricompensa apparentemente modesta: per la prima casella un chicco di grano, per la seconda casella il doppio, cioè due chicchi, per la terza casella il doppio di quanto chiesto nella seconda casella e così via raddoppiando sempre per ogni casella quanto chiesto per la casella precedente fino alla casella 64.

a. Qual è il numero totale dei chicchi di grano chiesti?
b. A quale casella corrispondono 262143 chicchi di grano?
c. Seguendo un procedimento simile a quello che si è seguito per determinare la somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica, scrivi la formula che dà il prodotto di n termini consecutivi di una progressione geometrica a termini positivi. Determina, quindi, il prodotto dei chicchi di grano corrispondenti alle prime 8 caselle.
d. In una progressione geometrica, se la ragione è positiva i termini della successione hanno tutti lo stesso segno? Fornisci una spiegazione esauriente.

Quesiti

1. Determina il termine generale della successione $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ Traccia il grafico della successione. Una stessa successione può essere definita analiticamente in più modi diversi? In caso affermativo, fornisci una seconda espressione analitica della successione. Definisci ricorsivamente la successione data.

2. Di una progressione geometrica si sa che $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_6 = -25\sqrt{10}$. Determina l'espressione analitica della progressione e quindi i primi sei termini.

3. Una particolare successione è quella di Bernoulli. Una definizione ricorsiva di tale successione è la seguente: $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_n = (B+1)^n$, con $n > 1$ e con la convenzione che, dopo aver sviluppato la potenze del binomio in questione, gli esponenti di B vengano considerati pedici.

Per esempio, si ha: $B_3 = (B+1)^3 = \; = B^3 + 3B^2 + 3B^1 + 1 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1$, da cui, semplificando i termini B_3, si ricava il valore di B_2: $B_2 = -\frac{1}{3} - B_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Nota che nello sviluppo del cubo del binomio è stato considerato l'esponente di B alla prima potenza, che tradizionalmente non si scrive, che diventa poi il pedice 1 e che la formula $B_n = (B+1)^n$ per un dato valore di n dà il termine B_{n-1}. Determina il valore di B_5.

4. La sequenza 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, ... è detta successione di Perrin. Individua una definizione ricorsiva della successione. Indica i primi tre termini rispettivamente con $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e il generico termine con $P(n)$. Si ha quindi $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = 2$.

Il piano cartesiano e le funzioni lineari

Problema

La più piccola tripletta di numeri naturali consecutivi, ognuno dei quali è uguale alla somma di due quadrati, è formata da numeri di tre cifre tali che il numero più piccolo ha la prima cifra uguale all'ultima, la somma dei quadrati delle cifre del numero più piccolo è 17 e la somma dei tre numeri è 699.

- **a.** Trova i tre numeri. Considera il primo numero della tripletta trovata. Trova i due numeri che elevati al quadrato e sommati danno il numero considerato. A tal fine osserva che il numero in questione è pari e quindi i due numeri che si stanno cercando devono essere entrambi pari o entrambi dispari; inoltre i due numeri sono uno di una cifra e l'altro di due cifre.
- **b.** Considera i due ultimi numeri trovati al punto a. come le misure, in centimetri, dei cateti di un triangolo rettangolo e calcolane l'ipotenusa e l'area.
- **c.** In un sistema di assi cartesiani ortogonali siano $A(-2,-1)$, $B(4,-1)$ e $C(4,13)$ tre punti in modo che *AB*, *BC* e *AC* siano rispettivamente i cateti e l'ipotenusa del triangolo in esame. Di tale triangolo determina le coordinate del baricentro, del circocentro e l'altezza relativa all'ipotenusa. Verifica, inoltre, se i punti $A(-2,-1)$, $C(4,13)$ ed $E(-5,-8)$ sono o meno allineati.
- **d.** Considera i punti medi dei lati del triangolo *ABC*, unisci tali punti e determina il perimetro del triangolo così ottenuto.
- **e.** Prolunga il lato *AB* del triangolo *ABC* dalla parte di *B* fino al punto *D* in modo che *B* sia il punto medio del segmento *AD*. Determina l'area del triangolo *ACD*. Verifica che tale triangolo è isoscele.

Quesiti

1. Disegna il grafico della funzione $y=-\sqrt{3}x-2$ individuandone lo zero, l'intersezione con l'asse *y* e l'angolo che essa forma con l'asse *x*. Dimostra che la funzione è strettamente decrescente.
2. Dimostra che, se una retta passante per l'origine forma con l'asse *x* un angolo di 60°, il suo coefficiente angolare è $\sqrt{3}$.
3. Data la funzione $y=\left(k^3+2k^2-2k\right)x$, determina per quali valori di *k* il grafico della funzione è una retta che:
   - **a.** forma con l'asse *x* un angolo acuto;
   - **b.** forma con l'asse *x* un angolo di 45°;
   - **c.** coincide con l'asse *x*.
4. Traccia il grafico della funzione: $y=|-x-1|-|-x+2|$
5. Interpreta graficamente e risolvi la disequazione: $\left|x-\frac{1}{2}\right|\geq|-x+3|-1$

La retta nel piano cartesiano

Problema

In un sistema di assi cartesiani ortogonali sono dati tre punti $A(1,2)$, $B(4,8)$, $C(6,1)$. Determina:

a. le equazioni degli assi dei segmenti *AB*, *BC* e *AC* sia come rette perpendicolari ai segmenti nei loro punti medi sia come luogo dei punti equidistanti dagli estremi dei segmenti;
b. l'area del triangolo *ABC*;
c. le coordinate dell'ortocentro del triangolo *ABC*;
d. le coordinate del punto D situato nel primo quadrante tale che il quadrilatero *ABCD* sia un parallelogramma, e le coordinate del punto di incontro delle diagonali del parallelogramma;
e. la rappresentazione analitica di tale parallelogramma.

Quesiti

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali, due punti *A* e *B*, che hanno rispettivamente ascissa 3 e -2, appartengono alla retta di coefficiente angolare $-\frac{4}{3}$. Calcola la distanza tra i due punti.

2. Date le rette di equazioni:
$(k-1)x+(k+2)y+k-3=0$ e $kx+\left(k-\frac{1}{2}\right)y-k=0$

a. discuti al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$ la posizione reciproca delle rette;
b. trova i valori di *k* per cui le rette sono perpendicolari;
c. è possibile che la prima retta coincida con l'asse *x*?
d. trova i valori di *k* per cui la seconda retta passa per l'origine degli assi;
e. trova i valori di *k* per cui la prima è parallela all'asse *y*. La retta trovata è il grafico di una funzione? Fornisci una spiegazione esauriente;
f. trova i valori di *k* per cui la seconda retta passa per il punto $P(1+\sqrt{3}, \sqrt{3}-2)$.

3. Determina le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette aventi equazioni $3x-2\sqrt{2}y+1=0$ e $x-4y-5=0$. Verifica che le due bisettrici sono tra loro perpendicolari.

4. Dato il fascio di equazione:
$(3k-1)x-(2k-1)y+3+k=0$

a. individua le generatrici del fascio;
b. studia le caratteristiche del fascio;
c. determina la retta del fascio perpendicolare alla retta di equazione $x-3y+\sqrt{2}=0$.

5. Rappresenta graficamente il sistema:

$$\begin{cases} y-5\le 0 \\ y+3\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ -2x-y+9\ge 0 \end{cases}$$

Circonferenza

Problema

Dato il fascio di circonferenze di equazione $(4k+1)x^2+(4k+1)y^2+2kx-(6k+1)y-4k-1=0$, determina:

- **a.** le equazioni delle circonferenze generatrici, l'asse radicale, gli eventuali punti base, la retta dei centri;
- **b.** la circonferenza del fascio che passa per il punto $(3,1)$;
- **c.** le circonferenze tangenti alla retta $x=y-2$;
- **d.** la circonferenza avente il centro sull'asse *y*;
- **e.** i valori di *k* per cui i cerchi del fascio abbiano area $\frac{5}{4}\pi$.

Quesiti

1. Data la circonferenza di equazione

$x^2+y^2-8x+8y+16=0$

determinane il centro, il raggio, la tangente nel suo punto $D\left(3,-4+\sqrt{15}\right)$ e i punti di intersezione con gli assi.

2. I punti $A\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ e $B(-1,-2)$ sono gli estremi di un diametro di una circonferenza. Determina l'equazione della circonferenza.

3. Stabilisci, sia con il metodo geometrico sia con quello analitico, la posizione reciproca tra la retta *r* di equazione $2x+y-5=0$ e la circonferenza di equazione $4x^2+4y^2-16y-9=0$. Rappresenta graficamente le due curve.

4. Dopo aver verificato che il punto $P(2,1)$ è esterno alla circonferenza di equazione

$x^2+y^2+x-y-2=0$

determina l'equazione della polare del punto *P* rispetto alla circonferenza.

5. Stabilisci la posizione reciproca delle due circonferenze di equazioni:

$5x^2+5y^2+x-4=0$ _e_ $x^2+y^2+y=0$

6. Dato il fascio formato da due circonferenze non concentriche di equazioni $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$, dimostra che l'asse radicale è una retta perpendicolare alla retta dei centri delle due circonferenze.

Parabola

Problema

Nel fascio di parabole $y=(k-1)x^2-2x-4k$, determina:

a. le generatrici e i punti base;
b. le parabole degeneri del fascio;
c. la parabola del fascio tangente all'asse *x*;
d. la parabola che si ottiene per $k=3$, la parabola che si ottiene per $k=-3$ e rappresentale sullo stesso grafico assieme alle generatrici e alle parabole degeneri;
e. i due fasci di parabole, con asse parallelo all'asse *y*, tangenti rispettivamente nei due punti base alla retta $y=x$.

Quesiti

1. Determina per quali valori di *k* la retta *s* di equazione $y=x+k$ risulta secante alla parabola di equazione $y=x^2+x+1$.

2. Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse *y*, che passa per i punti $A(0,1)$, $B\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ e $C(2,6)$.

3. Data la parabola $y=2x^2-2x+1$, determina:

f. le coordinate del vertice, del fuoco, degli eventuali punti d'intersezione con gli assi e l'equazione della direttrice;
g. l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto $P(2,5)$;
h. l'area del triangolo *APV* essendo *A* il punto d'intersezione con l'asse *y*;
i. l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola e dalla retta *AP*.

4. Risolvi graficamente la disequazione irrazionale $\sqrt{3+x}>x-1$.

5. Vi è relazione tra il grafico della parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ e il grafico della parabola di equazione $y=ax^2+bx+c+2$?
Giustifica adeguatamente la risposta dando anche, eventualmente, dei valori arbitrari ad *a*, *b* e *c*.

Ellisse

Problema

Data l'ellisse γ di equazione $x^2+9y^2=9$:

a. determina l'equazione dell'ellisse γ' avente centro in $C(3,2)$ con assi paralleli agli assi cartesiani e semiassi di misura uguale a quella dei semiassi di γ;

b. rappresenta graficamente γ e γ' dopo aver determinato, per entrambe, le coordinate dei vertici e dei fuochi;

c. determina il perimetro del parallelogramma avente per vertici i vertici di γ e γ' relativi agli assi maggiori;

d. scrivi l'equazione dell'ellisse γ'' avente come assi di simmetria gli assi cartesiani e che passa per i punti d'intersezione della retta di equazione $x+2y-4=0$ con gli assi cartesiani;

e. calcola l'area della regione di piano che ha come contorno l'ellisse γ.

Quesiti

1. Data l'equazione $(k-1)x^2+(2-k)y^2=1$, determina:

a. per quali valori di *k* essa rappresenta un'ellisse;

b. per quali valori di *k* essa rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse *x*.

2. Scrivi l'equazione della retta *t* tangente all'ellisse di equazione $4x^2+y^2=8$ nel suo punto *P* del terzo quadrante di ordinata -1.

3. Scrivi l'equazione dell'ellisse che passa per $P(5,0)$ e ha i fuochi nei punti di coordinate $(\pm 3,0)$.

4. Scrivi le equazioni delle ellissi riferite agli assi e con centro nell'origine sapendo che il rombo i cui vertici coincidono con quelli dell'ellisse ha area uguale a 27 e semidiagonale minore uguale a 3.

5. Scrivi l'equazione dell'ellisse avente come assi di simmetria gli assi cartesiani e che passa per i punti d'intersezione della retta di equazione $x-4y+4=0$ con gli assi cartesiani. Trova le coordinate dei fuochi e il valore dell'eccentricità.

6. Traccia il grafico della funzione:

$$y=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{9}-x^2}$$

Iperbole

Problema

Dato il fascio di funzioni omografiche di equazione $y=\frac{(k-1)x+1}{kx-2}$:

a. determina per quali valori di *k* essa rappresenta un'iperbole equilatera;
b. esamina che cosa accade in corrispondenza dei valori di *k* per cui l'equazione non rappresenta un'iperbole equilatera;
c. determina gli eventuali punti base del fascio, cioè i punti per cui passano tutte le curve del fascio;
d. determina per quali valori di *k* l'iperbole corrispondente ha come asintoto la retta di equazione $y=2$ e traccia il grafico dell'iperbole trovata;
e. determina l'equazione dell'iperbole avente centro nel punto $C(-2,2)$, fuochi sulla retta $y=2$, semiasse trasverso di misura 2, semiasse non trasverso di misura 3 e traccia il grafico dell'iperbole trovata.

Quesiti

1. Determina per quali valori di *k* l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{k-1}=1$ ha i fuochi nei punti di coordinate $(\pm 6,0)$.

2. Scrivi l'equazione della retta tangente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ nel suo punto *P* del secondo quadrante di ordinata 3.

3. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi, tangente alla retta di equazione $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, e rappresentala graficamente.

4. Rappresenta graficamente l'iperbole equilatera $xy=9$, dopo averne determinato vertici e fuochi.

5. Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente per asintoti le rette di equazioni $y=\pm\frac{1}{2}x$ e passante per il punto $P(3,\sqrt{2})$, trova la misura dell'area del triangolo PF_1F_2 con F_1 e F_2 fuochi dell'iperbole.

6. Risolvi graficamente l'equazione:
$\sqrt{|x^2-16|}=x+4$

Coniche e luoghi geometrici

Problema

a. Studia, al variare di *k*, la natura delle coniche del fascio di equazione:
$(k-1)x^2+(k+1)y^2+(2-k)x+ky-1=0$

b. Studia le coniche che si ottengono dall'equazione data al punto **a.**, rispettivamente per $k=-1$, $k=0$, $k=2$.

c. Trova i punti d'intersezione delle coniche che si sono ottenute al punto precedente per $k=0$, $k=2$.

d. Data la conica trovata al punto **b.** per $k=2$, determina l'equazione del fascio di ellissi con centro nel punto $C\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3}\right)$, assi paralleli agli assi cartesiani e tangente alla conica in questione nel suo punto *P* di coordinate $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Quesiti

1. Discuti il sistema misto:
$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4=0 \\ y=x+k \\ 2-2\sqrt{2}\le x\le 2 \wedge y\ge 0 \end{cases} \qquad 0$$

2. Rappresenta graficamente il sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} 3x^2+3y^2+x-2\sqrt{3}y-1\ge 0 \\ 4x^2+4y^2+24x-32y-21\le 0 \end{cases}$$

3. Rappresenta la curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=2t^2-1 \\ y=t+2 \end{cases}$$
e scrivi la sua equazione cartesiana.

4. Dati in un piano un punto fisso *F*, detto fuoco, di coordinate $F(2,0)$ e una retta *d*, detta direttrice a cui non appartiene *F*, di equazione $x-1=0$ e un numero reale non negativo 2*k*, detto eccentricità, determina al variare di *k* il luogo dei punti *P* del piano per cui il rapporto tra le distanze di *P* dal fuoco e dalla retta *d* è costante ed è uguale a 2*k*. Stabilisci per quali valori di *k* il luogo trovato rappresenta un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

5. Scrivi le equazioni di due coniche che:
   a) non hanno alcun punto in comune;
   b) hanno due punti in comune.

Funzioni, equazioni e disequazioni esponenziali

Problema

Data la funzione $f(x)=\dfrac{3^{x+1}-9^x}{3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3}$:

e. determinane il dominio;
a. studiane il segno e trova le regioni del piano cartesiano dove giace il suo grafico;
b. trova gli eventuali zeri;
c. determina la funzione $y=g(x)$ il cui grafico è simmetrico di quello della funzione $y=f(x)$ rispetto alla retta di equazione $y=1$. Con quali trasformazioni geometriche puoi dedurre, a partire dal grafico della funzione $y=f(x)$, quello della funzione $y=g(x)$?
d. calcola le coordinate dei punti che hanno in comune i grafici delle due funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

Quesiti

1. Determina il dominio della seguente funzione:
$$y=\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^{\sqrt{2x+1}}$$

2. Semplifica la seguente espressione, applicando le proprietà delle potenze:
$$\frac{\left(4^{x^2+x-1}:2^{x-1}\right)^2}{\left(\sqrt{2^x}\right)^4\cdot 4^{2x^2-1}}$$

3. Determina l'espressione analitica della funzione il cui grafico è quello che si ottiene applicando al grafico di $y=2^{x+1}$ una simmetria rispetto alla retta di equazione $y=2$ e, al risultato, una traslazione di vettore $\vec{v}(-1,-1)$.

4. Risolvi l'equazione:
$$\frac{\sqrt{2^{3-x}}}{\sqrt[3]{2^x}}=\frac{2^x}{2^{2x+1}}$$

5. Risolvi il seguente sistema:
$$\begin{cases} e^x\cdot e^{x+y}=\sqrt{e} \\ e^x\cdot e^y=e^3 \end{cases}$$

6. Interpreta graficamente la seguente equazione:
$$2^x=x^2-4x+3$$

Funzioni, equazioni e disequazioni logaritmiche

Problema

Data la funzione $y=\frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x-1}}$:

a. determinane il dominio;
b. studiane il segno e rappresenta nel piano cartesiano le regioni cui appartiene il suo grafico;
c. trova gli eventuali zeri della funzione;
d. deduci qual è il dominio della funzione $y=\ln f(x)$.

Quesiti

1. Risolvi l'equazione esponenziale:
$$4^{x+1}-3^x=2^{2x}$$
2. Supposto $a>0$ e $a\neq 1$, trova per quali valori di x è valida la seguente uguaglianza:
$$\log_a \sqrt{x^2-1}+\log_a \frac{1+x}{x}=\log_a x$$
3. Risolvi la seguente equazione:
$$\log_2 \sqrt{x^2-16}-\log_2 \sqrt{x^2-9}=\log_2 x$$
4. Risolvi il seguente sistema:
$$\begin{cases}\log_3 (x+3)=1+\log_3 y \\ \log_3 \sqrt{x-y}=1\end{cases}$$
5. Semplifica la seguente espressione:
$$\frac{\log_{\frac{1}{3}} 2+\log_3 \sqrt{12}}{\log_9 4+\log_3 \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Numeri complessi, vettori e coordinate polari

Problema

Data l'espressione $\dfrac{\left(i^{93}+2i^{101}\right)^4+\left(i^{45}-2i^{86}\right)^3}{2\left(i^{15}:i^7\right)^2}-\dfrac{73+i^3}{2}$:

a. calcolane il valore;

b. indicato con z_1 il numero complesso ottenuto al punto **a.**, danne la rappresentazione geometrica e calcolane il modulo;

c. dividi il numero complesso z_1 per il numero complesso $2-i$;

d. indicato con z_2 il numero complesso che si ottiene dalla divisione al punto **c.**, interpreta geometricamente z_1+z_2 e z_1-z_2 ;

e. calcola la distanza tra i due punti che rappresentano z_1 e z_2 nel piano di Gauss;

f. scrivi in forma trigonometrica il numero complesso z_1.

Quesiti

.

1. Rappresenta nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z=x+iy$ che soddisfano la condizione $|2z-i|\le 4$.

2. Dimostra che se due numeri complessi hanno come somma un numero reale e come prodotto un numero reale non negativo, allora i due numeri sono complessi coniugati.

3. Dato il numero complesso $z=1-\sqrt{3}i$, calcola z^9.

4. Determina le radici terze del numero $w=-27i$ e rappresenta le radici trovate nel piano di Gauss.

5. Risolvi in **C** l'equazione:

$$z^2-2z+1+2i=0$$