

Anno Scolastico 2018-19

Classe 4[^]AS

PROGRAMMA DI MATEMATICA

Docente: prof.ssa Elena Nobili

Libro di testo in adozione:

M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone "3 Matematica.blu 2.0" vol. 4 - Zanichelli

Goniometria

- Le funzioni seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante
- Le funzioni inverse e relativi grafici
- Formule di addizione e di sottrazione, di duplicazione, di bisezione e parametriche razionali
- Curve goniometriche
- Equazioni e disequazioni goniometriche, sistemi

Trigonometria

- Teoremi sul triangolo rettangolo
- Area di un triangolo
- Teorema della corda
- Teoremi sui triangoli qualunque: teorema dei seni e teorema di Carnot.
- Relazioni fra trigonometria e geometria analitica.

Numeri complessi e coordinate polari

- Calcolo con i numeri complessi in forma algebrica, rappresentazione nel piano di Gauss.
- Forma trigonometrica di un numero complesso e relative operazioni; le radici n-esime di un numero complesso.
- La forma esponenziale di un numero complesso.

Vettori, matrici e determinanti

- Vettori nel piano.
- Vettori nel piano cartesiano.
- Matrici.
- Calcolo vettoriale e calcolo matriciale.
- Determinanti.
- Matrice inversa.

Trasformazioni geometriche

- Grafici trasformati. Composizione di trasformazioni.
- Isometrie: simmetria centrale, simmetria assiale, traslazione, rotazione. Composizione di isometrie.
- Similitudini: omotetie. Composizione di similitudini.
- Affinità: dilatazione. Classificazione delle affinità.

Geometria euclidea nello spazio

- Rette e piani nello spazio. Retta e piano perpendicolari, teorema delle tre perpendicolari
- Poliedri: prisma, piramide, tronco di piramide.
- Solidi di rotazione: cilindro, cono, sfera.
- Principio di Cavalieri.
- Calcolo di superficie e volume.

Geometria analitica nello spazio

- Equazione di un piano nello spazio, piani paralleli e perpendicolari
- Equazione di una retta come intersezione di piani non paralleli
- Equazioni parametriche di una retta
- Rette parallele e perpendicolari
- Condizione di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani

Calcolo combinatorio e probabilità

- Permutazioni semplici e con ripetizione
- Disposizioni semplici e con ripetizione
- Combinazioni semplici e con ripetizione

Definizione classica di probabilità.

- Teorema della probabilità contraria, teorema della probabilità totale, teorema della probabilità composta, teorema della probabilità condizionata; formula di Bayes.
- Variabili casuali discrete. La variabile binomiale

COMPITI PER LE VACANZE ESTIVE

Gli angoli e le funzioni goniometriche

Problema

Data la funzione $y = f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + 2x)$:

- semplifica la sua espressione;
- trova quali trasformazioni geometriche si possono applicare, alla funzione goniometrica elementare, per tracciare il grafico della funzione data;
- determinane il periodo;
- determina a e b in modo che il grafico della funzione $g(x) = a + b \sin x$ passi per i punti del grafico di $y = f(x)$ di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e π .

Quesiti

- Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(2, -1)$ che forma con l'asse x un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- Determina per quali valori di k esiste un angolo α tale che $\cos \alpha = \frac{k^2 - 2}{k}$.

- Semplifica l'espressione:

$$(a^2 - b^2) \cos \frac{7}{2}\pi + \frac{4ab}{\cos \pi - \sin \frac{5}{2}\pi} - \frac{a^2 + b^2}{\sin \frac{3}{2}\pi}$$

- Verifica che per $\alpha = 270^\circ$ si ha:

$$(a+1)(a-1)\sin(\alpha - 180^\circ) + (4a+5)\cos(\alpha + 90^\circ) = (a+2)^2$$

- Calcola il valore dell'espressione:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ}} \cdot \frac{\cos 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} + \frac{\cot 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \cot 60^\circ \tan 45^\circ}$$

Formule e identità goniometriche

Problema

Dato il fascio di rette di equazione $2(k-1)x + (k+1)y - 3k = 0$:

determinane il centro e le generatrici;

determina la misura dell'angolo formato dalle due generatrici;

scrivi l'equazione della circonferenza di centro l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e passante per il centro del fascio;

scrivi le equazioni parametriche della circonferenza.

Quesiti

1. Nel triangolo ABC rettangolo in B è $\hat{BAC} = \arcsin \frac{2}{3}$. Determina le funzioni goniometriche dell'angolo $\hat{ACB}$.
2. Semplifica l'espressione $\sin \left[\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) + \frac{\pi}{6} \right]$.
3. Verifica la seguente identità, supponendo che gli argomenti delle funzioni goniometriche assumano valori per cui l'espressione è definita:
$$\sin^2 \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \cos^2 \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\cos 4\alpha}{2}$$
4. Scrivi una rappresentazione parametrica della curva $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ e trasforma l'equazione parametrica trovata in equazione parametrica razionale mediante le formule parametriche.
5. Una funzione lineare in seno e coseno $y = a \sin x + b \cos x + c$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$, si può scrivere nella forma equivalente $y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) + c$, dove φ è la misura dell'angolo tale che $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Dopo aver scritto la funzione lineare $y = \sin x - \cos x + 1$ nella forma $y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) + c$, tracciane il grafico e individua i punti di massimo e di minimo.

Equazioni goniometriche

Problema

- a. Risolvi l'equazione lineare $\sqrt{3} \sin x = \cos(-x)$.
- b. Interpreta graficamente le soluzioni tracciando i grafici di due opportune funzioni e determina le coordinate dei punti d'intersezione tra i due grafici compresi nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$.
- c. Aggiungi 1 al secondo membro dell'equazione data e risolvila con il metodo grafico.
- d. Risolvi l'equazione di cui al punto c. con il metodo algebrico.
- e. Risolvi l'equazione di cui al punto c. con il metodo dell'angolo aggiunto.
- f. Interpreta graficamente le soluzioni tracciando i grafici di due opportune funzioni e determina le coordinate dei punti d'intersezione tra i due grafici compresi nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$.
- g. L'equazione $\sqrt{3} \sin x - 3 = -\sqrt{3} \cos x - 2 \sin x \cos x$ presenta una particolarità. Quale? Indica un metodo per risolvere l'equazione proposta.

Quesiti

1. Risolvi l'equazione: $\sin^2(2x + 60^\circ) = 1$
2. Risolvi l'equazione: $(\tan 5x - 1)(2 \cos 3x - \sqrt{3}) = 0$
3. Risolvi l'equazione: $\sin(5^\circ + x) = \sqrt{3} \cos(5^\circ + x)$
4. Risolvi l'equazione: $\sin 3x = -\sin 6x$
5. Risolvi l'equazione: $|2 \sin x - 1| = \sin x - 2$
6. Risolvi l'equazione: $5 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x - 1 = 0$
7. Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{3 \sin x - 4 \sin^3 x}$$

Disequazioni goniometriche ed equazioni parametriche

Problema

Data la funzione $y = \frac{\cos 2x}{2\sin x - 1}$, determina:

- il periodo;
- il dominio;
- gli zeri;
- il dominio della funzione $\frac{1}{y}$;
- per quali valori di x è $y < -1$.

Quesiti

1. Risolvi la disequazione: $\cos 2x > \sin x + 1$ con $x \in [0, 2\pi]$

2. Risolvi la disequazione: $\log_{\frac{1}{2}} \left(|\cos x| + \frac{1}{2} \right) > 0$

3. Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{\ln \left(|\sin x| - \frac{1}{2} \right)}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2} \sin x < 0 \end{cases}$$

5. Discuti graficamente il sistema misto:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x - 2 - k = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

Trigonometria

Problema

Dato il triangolo di vertici A , B e C , sapendo che $AB = 80$ cm, $BC = 50$ cm e $\hat{A}BC = 60^\circ$, determina:

- a. il perimetro;
- b. l'area;
- c. il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo;
- d. il raggio della circonferenza inscritta al triangolo;
- e. la bisettrice dell'angolo $\hat{A}CB$.
- f. È possibile che un triangolo abbia i seguenti lati: $AB = 80$ cm, $BC = 40$ cm e $AC = 30$ cm?

Quesiti

1. Nel triangolo rettangolo ABC il perimetro è 36 cm ed è $\cos \hat{A}CB = \frac{3}{5}$. Determina l'ipotenusa.
2. Nel triangolo ABC si sa che $a = 7$, $b = 5$ e che la mediana m_c è 2. Qual è la misura di AB ?
3. L'area del triangolo ABC è $27a^2$. Sapendo che $\overline{AB} = 6a\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 6a$, determina $\cos \hat{A}BC$.
4. Nel triangolo ABC è $\hat{B}AC = 60^\circ$, $\hat{A}BC = 45^\circ$ e $\overline{BC} = 2a$. Determina l'area del triangolo.
5. In una circonferenza di raggio $r = 5a$ una corda AB è sottesa a un angolo α tale che $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Determina la misura della corda.

Rotazioni, similitudini e affinità

Problema

Date le equazioni $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$:

- verifica che definiscono un'affinità;
- stabilisci se si tratta di affinità diretta o inversa;
- determina i punti A' , B' , C' corrispondenti rispettivamente di $A(1,1)$, $B(-1,2)$, $C(-2,-1)$ nell'affinità;
- determina i punti uniti;
- verifica che l'affinità non è una isometria.

Quesiti

- Determina le equazioni della rotazione avente centro in $C(-1,-1)$ e angolo di rotazione $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- Dopo aver scritto le equazioni della rotazione avente centro nell'origine e angolo di rotazione $\alpha = \frac{\pi}{6}$, determina l'equazione della corrispondente in questa rotazione della retta $y = 2x$.
- Riconosci quale conica è rappresentata dall'equazione $x^2 - xy + 2y^2 - 4x + y + 3 = 0$.
- Giustifica perché le equazioni $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + y - 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$ non definiscono un'affinità.
- Riconosci che la seguente affinità è un'isometria e classificala:
 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

Numeri complessi, vettori e coordinate polari

Problema

Data l'espressione $\frac{(i^{93} + 2i^{101})^4 + (i^{45} - 2i^{86})^3}{2(i^{15} : i^7)^2} - \frac{73 + i^3}{2}$:

- calcolane il valore;
- indicato con z_1 il numero complesso ottenuto al punto **a.**, danne la rappresentazione geometrica e calcolane il modulo;
- dividi il numero complesso z_1 per il numero complesso $2 - i$;
- indicato con z_2 il numero complesso che si ottiene dalla divisione al punto **c.**, interpreta geometricamente $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$;
- calcola la distanza tra i due punti che rappresentano z_1 e z_2 nel piano di Gauss;
- scrivi in forma trigonometrica il numero complesso z_1 .

Quesiti

- L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si dice essere un campo. Spiega cosa significa tale affermazione.
- Rappresenta nel piano di Gauss il luogo dei numeri complessi $z = x + iy$ che soddisfano la condizione $|2z - i| \leq 4$.
- Dimostra che se due numeri complessi hanno come somma un numero reale e come prodotto un numero reale non negativo, allora i due numeri sono complessi coniugati.
- Dato il numero complesso $z = 1 - \sqrt{3}i$, calcola z^9 .
- Determina le radici terze del numero $w = -27i$ e rappresenta le radici trovate nel piano di Gauss.
- Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione:
$$z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$$

Geometria nello spazio

Problema

Una piramide triangolare regolare ha base di lato $2a$. Il volume della piramide è $\frac{2}{3}a^3\sqrt{3}$.

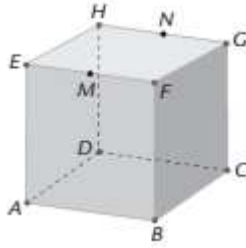
- a. Verifica che l'altezza della piramide è congruente al lato di base.
- b. Calcola l'area della superficie totale della piramide.
- c. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che tale piano divida la piramide in due parti equivalenti.
- d. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che il prisma avente come basi la sezione del piano con la piramide e la sua proiezione ortogonale sulla base della piramide stessa abbia superficie totale di area massima.
- e. Determina il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

Quesiti

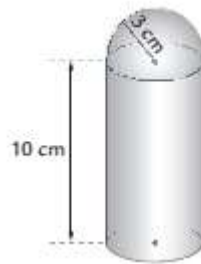
1. Vero o falso?

- a. se la retta r è parallela al piano α e il piano α è parallelo al piano β ,
allora la retta r è parallela al piano β **V F**
- b. nello spazio, data una retta r e un punto P appartenente alla retta r , esiste una sola
retta passante
per P e perpendicolare a r **V F**
- c. nello spazio, data una retta r e un punto P appartenente alla retta r , esiste una sola
retta passante
per P e parallela a r **V F**
- d. se la retta r appartiene al piano α , la retta s appartiene al piano β , e i due piani
 α e β sono perpendicolari, allora le due rette r ed s sono complanari **V F**

2. Considera il cubo rappresentato in figura, dove M ed N sono, rispettivamente, i punti medi degli spigoli EF e GH . Determina da che cosa è costituita l'intersezione dei due piani: AEM ed EBG ; ADH ed MFG ; ABC ed ENF .



3. Un parallelepipedo ha spigoli di base di lunghezza 6 cm e 12 cm e altezza di 3 cm.
Determina la lunghezza della diagonale di un cubo equivalente al parallelepipedo.
4. Il solido in figura è formato da un cilindro e da una semisfera che ha una base coincidente con quella del cilindro. Determina il volume e l'area della superficie totale del solido.



5. Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza 2 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

Geometria analitica nello spazio

Problema

Considera i due punti $C(-1, -2, 3)$ e $P(1, 0, 2)$.

- a. Determina le coordinate del punto simmetrico di C rispetto a P .
- b. Scrivi l'equazione della retta CP .
- c. Tra i piani passanti per la retta CP , determina quello che passa per l'origine del sistema di riferimento.
- d. Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro C e passante per P .
- e. Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie sferica nel punto P .

Quesiti

1. Determina l'equazione del piano passante per $B(0, 1, -1)$ e $C(3, 2, 1)$ e parallelo al vettore $\vec{u}(0, 0, 5)$.
2. Determina i valori di k e $h \in \mathbf{R}$ tali che i piani $2x + hy - 2z + 3 = 0$ e $x + 2y + kz + 1 = 0$ siano paralleli.
3. Determina, sia in forma parametrica sia come intersezione di piani, l'equazione della retta passante per i punti $A(1, 2, -1)$ e $B(0, 1, 4)$.
4. Dato il punto $A(3, -2, 4)$ e il piano $x - 3y + 2z + 4 = 0$, scrivi l'equazione della retta passante per A e perpendicolare al piano.
5. Data la sfera di centro $C(1, 2, 3)$ e raggio 4, scrivi le equazioni dei piani tangenti alla sfera che hanno vettore normale $\vec{n}(0, 1, -1)$.

Calcolo combinatorio

Problema

Considera la parola OSSERVARE.

- a. Quanti sono i suoi anagrammi, anche privi di significato?
- b. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con la lettera A?
- c. Quanti sono i suoi anagrammi che iniziano con una vocale?
- d. Considerato l'insieme X formato dalle lettere distinte da cui è formata la parola OSSERVARE, quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di X ?
- e. Quanti sono complessivamente i sottoinsiemi (propri o impropri) di X ?

Quesiti

1. Le targhe delle automobili sono formate da una coppia di lettere, una terna di numeri e infine una coppia di lettere. Le lettere possono essere solo 22 perché sono state tolte la I, la O, la Q e la U. Quante targhe sono possibili?
2. In quanti modi posso mettere nella libreria 15 libri sapendo che sono di 2 autori diversi, che del primo autore ci sono 6 libri e del secondo 9 e che voglio mettere vicini i libri dello stesso autore?
3. In quanti modi diversi si possono scegliere 2 persone per un'interrogazione tra i 24 alunni di una classe?
4. In un gioco da tavolo si lanciano 5 dadi contemporaneamente. In quanti modi si possono presentare le 5 facce superiori?
5. La combinazione di una cassaforte è formata da 8 cifre (ciascuna scelta tra 0 e 9). Sapendo che le cifre possono ripetersi e che l'ultima cifra è pari, quante combinazioni sono possibili (considerando lo 0 pari)?

Probabilità

Problema

Un'urna contiene 112 dadi, di cui 56 sono equi, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che per ciascuno di essi la probabilità che esca 1 è $\frac{1}{2}$, e ciascuno degli altri numeri possa uscire con probabilità $\frac{1}{10}$.

Un dado viene estratto a caso e lanciato.

- a. Qual è la probabilità di ottenere 3?
- b. Qual è la probabilità di ottenere un numero dispari o multiplo di 3?

Un dado viene estratto e lanciato due volte.

- c. Qual è la probabilità di ottenere 2 e 3?
- d. Sapendo che nei due lanci si sono ottenuti i due numeri 2 e 3, qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

Quesiti

1. Supponiamo di avere un'urna contenente 15 palline numerate da 1 a 15. Si estraggono a caso due palline, una alla volta, con reinserimento. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
 - a. la prima pallina ha un numero pari e la seconda è numerata 10;
 - b. almeno una delle due palline ha un numero dispari.
2. Un'urna contiene palline numerate da 1 a 8. Supponiamo di estrarre a caso 2 palline in blocco. Calcola la probabilità che sia estratta la pallina numero 2 sapendo che la somma dei due numeri estratti è uguale a 8.
3. Due carte vengono estratte da un mazzo di 52, senza reinserimento. Calcola la probabilità:
 - a. che la prima carta sia di cuori e la seconda rossa;
 - b. che la seconda carta sia rossa.
4. Sono date 3 urne contenenti rispettivamente 15 biglie di cui 8 rosse, 25 biglie di cui 14 rosse e 10 biglie di cui 4 rosse. Si lancia un dado. Se esce 6 si sceglie la prima urna, se esce 4 si sceglie la seconda urna, altrimenti si sceglie la terza. Si estraggono 2 biglie contemporaneamente. Calcola la probabilità che le 2 biglie siano rosse.
5. Considera il seguente gioco. Si lancia un dado equo: se esce 1, si rilancia il dado e si vince se esce un numero pari; se esce un numero diverso da 1, si lanciano 2 dadi e si vince se il massimo tra i due valori ottenuti è al più 3. Calcola la probabilità che nel lancio iniziale sia uscito 1 sapendo di aver vinto.