Liceo Statale "Marie Curie" - Meda

Anno Scolastico 2015 – 2016

Classe 4^ASA

Prof. Elena Nobili

➢ PROGRAMMA DI MATEMATICA

1. **Le funzioni goniometriche:** la misura degli angoli, le funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante), le funzioni goniometriche di angoli particolari, le funzioni goniometriche inverse, rappresentazioni grafiche di funzioni goniometriche.

2. **Le formule goniometriche:** gli angoli associati, le formule di addizione e sottrazione, le formule di duplicazione e bisezione, le formule parametriche, le formule di prostaferesi e di Werner.

3. **Le equazioni e le disequazioni goniometriche:** le equazioni goniometriche elementari, le equazioni omogenee in seno e coseno, i sistemi di equazioni goniometriche, le disequazioni goniometriche, le equazioni goniometriche parametriche.

4. **La trigonometria:** i triangoli rettangoli, applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli (area di un triangolo e di un parallelogrammo, teorema della corda), i triangoli qualunque (teorema dei seni, teorema del coseno).

5. **I numeri complessi:** il calcolo con i numeri immaginari, il calcolo con i numeri complessi in forma algebrica, vettori e numeri complessi, le coordinate polari, la forma trigonometrica di un numero complesso, operazioni fra numeri complessi in forma trigonometrica, le radici n-esime dell'unità, le radici n-esime di un numero complesso, la forma esponenziale di un numero complesso, risoluzioni di equazioni nel campo complesso.

6. **Lo spazio:** punti, rette e piani nello spazio, i poliedri, i solidi di rotazione, le aree dei solidi notevoli, l'estensione e l'equivalenza dei solidi, i volumi dei solidi notevoli.

7. **Le trasformazioni geometriche:** la traslazione, la rotazione, la simmetria centrale, la simmetria assiale, le isometrie, l'omotetia, la similitudine, le affinità.

8. **Il calcolo combinatorio:** i raggruppamenti, disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici e con ripetizione, la funzione n!, i coefficienti binomiali e le loro proprietà.

9. **Il calcolo della probabilità:** gli eventi, le concezioni classica, statistica e soggettiva della probabilità. L'impostazione assiomatica della probabilità, la probabilità della somma logica di eventi, la probabilità condizionata, la probabilità del prodotto logico di eventi, il problema delle prove ripetute, il teorema di Bayes.

Meda, 11 giugno 20

➢ LAVORI ESTIVI DI MATEMATICA

Gli studenti con il debito formativo o con il lavoro obbligatorio devono:

- ripassare accuratamente ogni argomento indicato nel programma, curandone la comprensione e la corretta esposizione orale, prima di eseguire i relativi esercizi
- riguardare gli esercizi svolti in classe
- svolgere le verifiche sotto riportate con precisione ed ordine sul quaderno.

Il quaderno con i compiti svolti deve essere consegnato il giorno previsto per la verifica del superamento del debito a settembre.
La prova di matematica sarà costituita da una verifica scritta seguita da una verifica orale.

Gli studenti promossi a giugno alla classe successiva devono

- ripassare tutti gli argomenti indicati nel programma, curandone la comprensione e la corretta esposizione orale
- svolgere tutte o parte delle verifiche sotto riportate in modo da arrivare in seconda senza alcuna lacuna sul programma dell’anno precedente.

1° VERIFICA

1.	Scritta l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla retta t di equazione 4x+3y=0 e passante per (0;2) determina le coordinate dei vertici del triangolo equilatero circoscritto, avente un lato sulla tangente in H $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.
2.	$\sqrt{3}\cot g 2x+3=0$
3.	$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$
4.	$cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$
5.	$\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\lvert 2\sin x\rvert -1}\geq 0$
6.	$\frac{\cos 2x+2\cos^2 x}{2\sin x-\sqrt{3}}\leq 0$
7.	$2\cos x+1\leq\sqrt{4\cos^2 x-3}$
8.	Considera una semicirconferenza di diametro AB = 2 e un punto P su di essa. Posto $A\hat{B}P=x$, sia C il punto simmetrico di A rispetto a P. Calcola al variare del punto P il perimetro p(x) del triangolo ACB e rappresenta la funzione ottenuta nell'intervallo $[0,2\pi]$ evidenziandone poi la parte relativa al problema.
9.	Data l'espressione $cosx=2m-3$ • Determina l'intervallo di variabilità del parametro m • Determina quali valori assume m se $x\ \in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right[$.

2° VERIFICA	
1.	Di un triangolo *ABC* retto in *A* si sa che $\hat{B}=\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$ e che $\overline{BC}-\overline{AB}=2a$. Calcola $\cos\hat{B}$ e $\cos\hat{C}$ e le lunghezze dei lati del triangolo.
2.	Un triangolo *ABC* è inscritto in una circonferenza di raggio *r* e $\cos A\hat{C}B=\frac{3}{5}$. Determina l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C=x$ in modo che l'area del triangolo *ABC* valga $\frac{28}{25}r^2$.
3.	Determina il dominio della seguente funzione. $y=\sqrt{\sqrt{2}-2\operatorname{sen}x}-\sqrt{\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-1}}$
4.	Risolvi la seguente equazione: $\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+\operatorname{sen}x+2-\sqrt{3}=0$
5.	È dato il fascio di circonferenze $x^2+y^2+(k-2)x+ky-k-1=0$. a) Determina la circonferenza del fascio passante per il punto $A\left(2-\sqrt{3};0\right)$. b) Trova l'angolo formato con l'asse delle ascisse dalla normale *n* alla tangente *t* della circonferenza determinata al punto a). c) Verifica che il luogo dei centri del fascio è una retta che forma un angolo con l'asse delle ascisse il cui coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6.	È data la funzione $f(x)=2^{x-1}+2$. a) Determina $f^{-1}(x)$ e rappresentala graficamente. b) Trova per quali valori del parametro *a* vi è una sola intersezione tra $f(x)$ e $g(x)=2+\log_2 ax$.

3° VERIFICA

- **PROBLEMA**

In una circonferenza di centro O e raggio r, è data la corda AB congruente al lato del triangolo equilatero inscritto. Si conduca la tangente in B e si consideri su di essa un punto C appartenente allo stesso semipiano di O rispetto alla retta AB.

a. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}C$, determina AC e BC in funzione di x.

b. Calcola il valore di x per cui l'area del triangolo ABC vale $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

c. Rappresenta in un periodo la funzione $f(x)=\frac{BC}{AC}$, evidenziando il tratto relativo al problema.

d. Discuti, limitatamente al problema geometrico, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, con $k \in R$.

- **QUESITI**

1. Dimostra che tra l'angolo al vertice α di un triangolo isoscele e un suo angolo alla base β sussiste la relazione: $\cos\alpha = 1-2\cos^2\beta$.

   Se $\beta = \arcsin\frac{5}{13}$ ed il lato misura 120 cm, trova la base e l'altezza del triangolo.

2. Dimostra che il perimetro e l'area di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r misurano rispettivamente $2nr\sin\frac{\pi}{n}$ e $\frac{1}{2}r^2 n\sin\frac{2\pi}{n}$.

   Calcola poi il perimetro ed area del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 2 e il raggio della circonferenza in cui è inscritto un ottagono regolare di area $32\sqrt{2}$.

3. Discuti, al variare del parametro reale k, il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} \sin^2 x - k\sin x\cos x + 2 - k = 0 \\ o < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

4. Semplifica la seguente espressione nel campo complesso C e rappresenta la soluzione sul piano di Argand – Gauss

$$\frac{\left(18i^{18}+7i^6\right)}{\left(2i^{52}+i^{53}\right)^2} : \frac{4i^{36}-2i^{20}}{\left(2i^8+i^7-i^{20}\right)^2}$$

5. Risolvi nel campo complesso l'equazione: $z^2 - \frac{1}{4}(z-\bar{z})^2 - 4 = 8i$ (porre $z = x + iy$).

6. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{(2+i)(1-i)}{3-2i} \qquad w = \frac{1}{(3+2i)^2}$$

4° VERIFICA

Problema 1

Sui lati OX e OY dell'angolo $X\hat{O}Y = \frac{2}{3}\pi$ siano fissati rispettivamente i punti A e B tali che $\overline{OA} = \overline{OB} = 2a$.

Internamente all'angolo $X\hat{O}Y$ si consideri un punto P tale che l'angolo $O\hat{P}A$ sia retto. Posto $A\hat{O}P = x$:

a) Rappresenta il luogo dei punti individuato dal punto P
b) esprimi l'area *s(x)* del quadrilatero *OAPB* in funzione di *x*
c) Verificato che $s(x) = \sqrt{3}a^2\left(\frac{1}{2} + \cos(2x - \frac{\pi}{3})\right)$ rappresenta il grafico della funzione ed evidenzia il tratto relativo al problema. Determina valore massimo e valore minimo della funzione relativamente alle limitazioni geometriche
d) Determina per quali valori di x si ha $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \leq s(x) \leq \sqrt{3}a^2$

Problema 2

Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 2 *a*, dove *a* è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $\frac{4}{5}$.

a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta *t* che non attraversa il triangolo e indicata con *x* la misura dell'angolo che questa retta forma con il cateto maggiore, esprimere in funzione di *x* il volume *V(x)* del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta *t*.
b) Verificato che risulta $V(x) = \frac{1}{2}\pi a^3(4\sin x + 3\cos x)$, con *x* appartenente ad un determinato intervallo, disegnare il grafico in un piano cartesiano
c) Utilizzare il grafico disegnato per discutere l'equazione $V(x) = k\pi a^3$ con *k* parametro reale.

Numeri complessi

1) Indica se le seguenti uguaglianze sono vere o false, specificando la motivazione

a) $\left|z \cdot \bar{z}\right| = |z|\left|\bar{z}\right|$

b) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

c) $\left(z + \bar{z}\right) \in R$

d) $i^{21} = i^{11}$

2) Rappresenta nel piano di Argand-Gauss i seguenti insiemi:

$A = \left\{z \in C: \ |z - 1| = \left|\bar{z}\right|\right\}$ $\qquad$ $B = \left\{z \in C: \ \left|z - \frac{i}{2}\right| \leq 2\right\}$ (punti 1)

3) Determina la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi:

a) $z = 5 - 5\sqrt{3}i$

b) $z = \dfrac{1}{-3+4i}$

4) Calcola in forma algebrica

a) $z = (i-1)^7$

b) $z = (2i-1)^3$

5° VERIFICA

1.	Date una circonferenza di raggio *r* e una sua corda *AB* a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro *O*, determinare un triangolo *AMB* con vertice *M* sul maggiore dei due archi *AB*, porre $A\hat{B}M = x$ e rispondere ai seguenti quesiti: a) determinare *x* in modo che risulti *AM* + *MB* = 2 ·*AB* ; b) verificato che si ottiene $x = \frac{\pi}{3}$, in corrispondenza del valore trovato, sia dato un punto *C* su *AM* tale che *AC* = *r* ; determinare la lunghezza del segmento *BC*; c) posto *r* = 1 , determinare la funzione *f* (*x*) = *AM* + *MB* e, verificato che si ottiene $y = 2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$, tracciarne il grafico evidenziando l'intervallo cui si riferisce il problema e identificare il valore di x per cui si ottiene il valore massimo.
2.	a) $\frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x - 1 + \cos x}{4\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2(1-\operatorname{sen}^2 x)} \geq 0$ b) $\frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt[3]{2 sen x - \sqrt{2}}} > 0$
3.	Un'urna contiene 20 palline bianche e 10 palline nere. a) Eseguendo 5 estrazioni senza reimbussolamento, in quanti casi si ottiene come esito dell'estrazione 3 palline bianche e 2 nere? b) E se ad ogni estrazione segue il reimbussolamento?
4.	Da un gruppo di 8 donne e 6 uomini deve essere scelta una commissione formata da 3 donne e 3 uomini. a) Quante diverse commissioni si possono formare? b) E se 2 degli uomini rifiutano di lavorare insieme? c) E se 2 delle donne rifiutano di lavorare insieme? d) E se 1 uomo e 1 donna rifiutano di lavorare insieme?
5.	Un bambino possiede dei mattoncini lego colorati: ne ha 6 rossi, 4 gialli, 1 verde e 1 blu. In quanti modi il bambino può metterli in colonna a formare una torre?

6° VERIFICA

1.	In una circonferenza di centro O e raggio r, è data la corda AB congruente al lato del triangolo equilatero inscritto. Si conduca la tangente in B e si consideri su di essa un punto C appartenente allo stesso semipiano di O rispetto alla retta AB. e. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}C$, determina AC e BC in funzione di x. f. Calcola il valore di x per cui l'area del triangolo ABC vale $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. g. Rappresenta in un periodo la funzione $f(x)=\frac{BC}{AC}$, evidenziando il tratto relativo al problema. h. Discuti, limitatamente al problema geometrico, il numero delle soluzioni dell'equazione f(x) = k, con $k \in R$.
2.	Di un triangolo *ABC* retto in *A* si sa che $\hat{B}=\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$ e che $\overline{BC}-\overline{AB}=2a$. Calcola $\cos\hat{B}$ e $\cos\hat{C}$ e le lunghezze dei lati del triangolo.
3.	$\dfrac{4\sin^2 x+\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x-\sqrt{3}}{\left\|\sqrt{2}\sin x\right\|-1}\geq 0$
4.	Determina il dominio della seguente funzione $y=\sqrt{\sqrt{2}-2\,\mathrm{sen}\,x}-\sqrt{\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{tg}\,x-1}}$
5.	$\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+\mathrm{sen}\,x+2-\sqrt{3}=0$
6.	$2\sin x+1\leq\sqrt{4\sin^2 x-3}$

7° VERIFICA

PROBLEMA

In una semicirconferenza di centro O e diametro AB = 2r si consideri una corda CD parallela ad AB (A più vicino a C) e da C e D si conducano le tangenti alla semicirconferenza fino ad incontrare rispettivamente in E ed F i prolungamenti di AB. Posto $B\hat{O}D = x$, si esprima per mezzo di x la funzione: $f(x) = \dfrac{\overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}}{\overline{EF}}$.

Calcolare infine per quale valore di x risulta $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

QUESITI

1) Dato $z = x + iy$, determina le soluzioni dell'equazione: $z^2 - \frac{1}{4}(z - \bar{z})^2 - 4 = 0$

2) Dato il seguente sistema: $\begin{cases} x' = (k-2)x + ky - 1 \\ y' = (k-3)x + y + k - 1 \end{cases}$ determina:

a) per quali valori del parametro k rappresenta un'affinità;
b) k in modo che l'affinità abbia un punto unito appartenente all'asse y.
c) Per il valore di k trovato al punto a) determina eventuali rette unite

3) Classifica le seguenti isometrie, individuando gli elementi che le definiscono

a) $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -y + \frac{1}{2} \end{cases}$

4) Determina una rotazione che porta gli assi della conica di equazione: $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 - 16 = 0$ su rette parallele agli assi cartesiani e scrivi l'equazione della conica ruotata. Rappresenta graficamente le due coniche.

8° VERIFICA

1.	Scrivi l'equazione della retta che si ottiene dalla rotazione di $\frac{4}{3}\pi$ della retta di equazione $y = x + 1$ intorno al punto $C(2; 3)$.
2.	$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 6 = 0$
3.	Componi una traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 4)$ con una omotetia di centro l'origine e rapporto $-\frac{1}{3}$. Determina il punto unito e le rette unite della trasformazione.
4.	Scrivi le equazioni della similitudine diretta tale che: $A(-2; -3) \to A'(-2; 10)$; $O(0; 0) \to O'(2; 3)$. Determina il perimetro e l'area del trasformato del quadrato *OABC* con $B(-5; -1)$ e $C(-3; 2)$.
5.	Date le otto monete da 2 euro, 1 euro, 50 centesimi, 20 centesimi, 10 centesimi, 5 centesimi, 2 centesimi, 1 centesimo, calcola: a) quanti sono i modi possibili con cui possono essere ordinate; b) quante sono le possibili successioni se non è rilevante la distinzione fra le monete da 2 e 1 euro e fra quelle dei centesimi; c) quante sono le disposizioni semplici formate da 4 monete; d) quanti sono i gruppi ordinati di 5 monete che si possono formare e che contengono la moneta da 1 euro.
6.	Data la parola BORBOTTÌO calcola: a) quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare; b) quanti sono gli anagrammi che iniziano con la sequenza BB; c) quanti sono gli anagrammi dove le lettere uguali sono tra loro vicine.

9° VERIFICA

1.	Verificare le seguenti identità a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$
2.	Un tesserino ha un codice segreto composto da 5 cifre. Se si ricorda che le prime due sono 4 e 0, che solo la quarta cifra è dispari e che nessuna cifra si ripete, quanti sono i codici possibili?
3.	In una pizzeria il pizzaiolo usa 7 ingredienti addizionali: acciughe, cipolle, prosciutto, carciofini, funghi, olive, salame. Calcolare quante pizze diverse può preparare con a. 5 ingredienti b. Le acciughe a altri 2 ingredienti c. 4 ingredienti, ma senza salame d. tutti gli ingredienti.
4.	Dato $(2a+3b)^n$, determinare n in modo che il 5° coefficiente sia i 5/6 del 6° coefficiente.
5.	In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne indistinguibili in 5 cassetti? (ogni cassetto può contenere da 0 a 12 penne).
6.	Date le otto monete da 2 euro, 1 euro, 50 centesimi, 20 centesimi, 10 centesimi, 5 centesimi, 2 centesimi, 1 centesimo, calcola: a) quanti sono i modi possibili con cui possono essere ordinate; b) quante sono le possibili successioni se non è rilevante la distinzione fra le monete da 2 e 1 euro e fra quelle dei centesimi; c) quante sono le disposizioni semplici formate da 4 monete; d) quanti sono i gruppi ordinati di 5 monete che si possono formare e che contengono la moneta da 1 euro.
7.	Data la parola SFARFALLIO calcola: a) quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare; b) quanti sono gli anagrammi che iniziano con la sequenza FF; c) quanti sono gli anagrammi dove le lettere uguali sono tra loro vicine.