

DISCIPLINA MATEMATICA

DOCENTE Paola Carcano

Libro di testo in adozione: "Matematica.blù 2.0 ld / volume 4 + ebook scuolabook - moduli O+Q, pigreco, tau, alfa", autori Bergamini Massimo / Trifone Anna / Barozzi Graziella, ed. Zanichelli

PROGRAMMA SVOLTO

Funzioni goniometriche: definizione, grafico e proprietà delle funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cotan x$ e delle funzioni inverse; archi associati e archi complementari. Grafici goniometrici deducibili

Formule goniometriche: formule di addizione e sottrazione, di duplicazione, di bisezione, formule parametriche. Grafici di funzioni lineari in seno e coseno ($y = a \cos x + b \sin x + c$) e di 2° grado in seno e coseno ($y = a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x + d$)

Equazioni e disequazioni goniometriche: equazioni elementari, riconducibili ad equazioni elementari, omogenee, lineari (metodo dell'angolo aggiunto, della circonferenza goniometrica e delle formule parametriche), disequazioni elementari, omogenee, lineari. Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni goniometriche

Relazioni fra lati e angoli di un triangolo: teoremi dei triangoli rettangoli, area di un triangolo, teorema della corda, teorema dei seni, teorema di Carnot; applicazioni

Geometria solida: posizione tra rette nello spazio, posizione retta piano, teorema delle tre perpendicolari; volumi e superfici di solidi; principio di Cavalieri e volume della sfera; volume del tronco di piramide o di cono

Numeri complessi: definizione e possibili forme (algebraica, trigonometrica, esponenziale); piano di Gauss e rappresentazione di un numero complesso; operazioni con i numeri complessi, radice ennesima; equazioni in \mathbb{C} .

Trasformazioni del piano: equazione delle isometrie (simmetria assiale e centrale, traslazione, rotazione), equazione delle omotetie, equazione delle similitudini, equazione delle affinità. Determinazione di punti uniti e rette unite e classificazione delle trasformazioni.

Calcolo combinatorio: definizione di fattoriale per ricorrenza, permutazioni semplici e con ripetizioni, disposizioni semplici e con ripetizione, combinazioni semplici e con ripetizione, binomio di Newton.

Limiti: introduzione e definizioni di limiti; algebra dell'infinito e calcolo dei limiti; elenco delle forme di indecisione e risoluzione delle F.I. algebriche di tipo $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$; definizione del simbolo di asintotico.

COMPITI ESTIVI

Tutti gli studenti dovranno svolgere gli esercizi allegati, ripassando, per ciascun esercizio la corrispondente teoria. Gli alunni con giudizio sospeso dovranno svolgere nuovamente le verifiche dell'anno scolastico 2015 - 2016 pubblicate sul sito ed un congruo numero di esercizi tratti dal libro per ciascun argomento.

Esercizi tratti dai compiti di maturità

Anno 2012

5. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .
10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
- A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$ C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$.

Si giustifichi la risposta.

Anno 2011

4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Anno 2010

- 6** Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.
- 8** Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
- 9** Si provi che non esiste un triangolo ABC , con $AB=3$, $AC=2$ e $\hat{A}BC=45^\circ$. Si provi altresì che se $AB=3$, $AC=2$ e $\hat{A}BC=30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

Anno 2009

- 2** Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
- 6** Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- 7** Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
- 10** Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Anno 2008

- 2** Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- 6** Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, con $n > 3$, sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
- 9** Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

Anno 2007

- 2** Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
- 6** Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
- 8** Si risolva l'equazione:

$$4 \binom{n}{4} = 15 \binom{n-2}{3}$$

Anno 2006

- 2** I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
- 4** La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
- 5** Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- 6** L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15^\circ < x < 45^\circ$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Disequazioni

Individua per ciascuna riga un titolo (es: disequazione di secondo grado con discriminante negativo, disequazione fratta...); ripassa la teoria relativa (anche agli argomenti di algebra che non ricordi) ed evidenzia eventuali difficoltà o fonti d'errore.

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $\cos x - \sqrt{6} \cos x + 1 \leq 0$ | $\ln x - \sqrt{6} \ln x + 1 \leq 0$ | $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{6} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 0$ |
| 2) $4\cos^2 x - 3 > 0$ | $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 > 0$ | $4\log_3^2 x - 3 > 0$ |
| 3) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ | $\cos^2 x - 4\cos x + 3 \leq 0$ | $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ |
| 4) $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ | $4^{2x} - 4^{x+1} + 5 \geq 0$ | $\tan^2(3x) - 4\tan(3x) + 5 \geq 0$ |
| 5) $ 2\cos x \leq 1$ | $ 2\tan(3x + \pi) \leq 1$ | $ 2\ln(3x + 1) \leq 1$ |
| 6) $\left 1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right > 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ | $ 1 - e^{2x} > 2e^{2x}$ | $ 1 - \ln(2x + 1) > 2\ln(2x + 1)$ |
| 7) $ 1 - 2\cos x \leq \cos x$ | $ 1 - 2\ln x \leq \ln x$ | $ 1 - 3^x \leq 3^x$ |
| 8) $\sqrt{3\cos x - 1} \leq \cos x$ | $\sqrt{3\tan x - 1} \leq \tan x$ | $\sqrt{3\ln x - 1} \leq \ln x$ |
| 9) $\sqrt{2\sin^2 x + \sin x} > 1 - \sin x$ | $\sqrt{2e^{2x} + e^x} > 1 - e^x$ | $\sqrt{2\ln^2 x + \ln x} > 1 - \ln x$ |
| 10) $\sin x(\cos^2 x + 3\cos x)(1 - 2\tan x) \leq 0$ | | $(4^x + 2^x - 12)(3^{x-1} - 2)(1 - 2\ln x) \leq 0$ |
| 11) $\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}\cos x + 1} \leq 0$ | $\frac{2\cos^2 x + 3\cos x - 5}{ \tan x - 1} \leq 0$ | $\frac{2\ln^2 x + 3\ln 5}{ x - 1} \leq 0$ |
| 12) $ 1 - \ln x > x$ | $e^{x+1}(x^2 - 1) > 1$ | $(2^{2x-3} + 1) > \ln(x + 4) \quad \sin x \leq \ln(1 + x)$ |

Grafici

Saper tracciare il grafico di una funzione qualsiasi è uno degli obiettivi del prossimo anno; la categoria di funzioni che puoi rappresentare è già ora abbastanza ampia. Traccia il grafico delle seguenti funzioni, senza farne lo studio. Verifica il tuo lavoro utilizzando un programma di grafica.

Funzioni algebriche

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|--|
| 1) $y = \frac{ x }{1 + 3x}$ | 2) $y = \sqrt{9 + 2x - 3x^2}$ | 3) $y = 1 - \sqrt{9 - 3 x }$ | 4) $y = \sqrt{2x + 3x^2}$ |
| 5) $y = \sqrt{2x + x^2 + 4}$ | 6) $y = \sqrt{ 2x - x^2 }$ | 7) $y = \frac{x}{ x } \sqrt{1 - x^2}$ | 8) $y = \left \frac{2x + 1}{3 - x} \right $ |

Funzioni goniometriche

- | | | |
|---|-----------------------------------|--|
| 1) $y = \sin x - \cos x + 1$ | 2) $y = \sin^2 x - \sin x \cos x$ | 3) $y = \cos x \sin x - 1$ |
| 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ | 5) $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ | 6) $y = \frac{1}{3} \cos\left 2x + \frac{\pi}{3}\right $ |

$$7) y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

$$1) y = \ln|x-1|$$

$$2) y = e^{2+|x|}$$

$$3) y = \ln\sqrt{3-x}$$

$$4) y = \frac{4^x - 1}{2^x - 1}$$

$$5) y = 2\log_{\frac{1}{3}}(3-|x|)$$

$$6) y = \frac{1 - \ln^2 x}{1 - \ln x}$$

Funzioni composte

$$1) y = \ln|\sin x|$$

$$2) y = \ln|\log_2 x|$$

$$3) y = \frac{1}{2^x - 1}$$

$$4) y = e^{\frac{2x+1}{x-2}}$$

$$5) y = e^{\tan x}$$

$$6) y = \frac{1}{x^2 + k}$$

$$7) y = \sqrt{\frac{2x-3}{x+4}}$$

$$8) y = \sqrt{2\cos x - 1}$$

Non tutte le funzioni si possono rappresentare deducendole da grafici noti, alcune richiedono uno studio, del quale per ora conosci i primi passi (dominio, parità-disparità, intersezioni con gli assi, segno, imiti agli estremi). Fai lo studio e traccia il grafico probabile delle seguenti funzioni

$$1) y = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

$$2) y = \frac{x^2 + 3x - 5}{2x + 1}$$

$$3) y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x}$$

$$4) y = \frac{1 + 2\sin x}{(2\cos x - \sqrt{3})\tan x}$$

$$5) y = \frac{1+x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$6) y = \sin x - \sqrt{\cos x}$$

$$7) y = \frac{2x^2 - 5}{1 - 3x^2}$$

$$8) y = \frac{x}{1 + 8x^3}$$

$$9) y = \sqrt{x^2 + 4x} + x$$

Limiti

Verifica i seguenti limiti attraverso la definizione

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1) = -1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}} = 0^+$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{3}{1-x}} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \cos x = 1^-$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} |e^{2x} - 1| = 1$$